$P : \mathrm{Hom}(\overline{\omega}, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C^{(2)})) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\overline{\omega} \otimes I^{(2)}, C^{(2)})$ はチェインマップである．

実際，　$u \in \mathrm{Hom}(\overline{\omega}_p, \mathrm{Hom}(I^{(2)}_q, C^{(2)}_r))$ に対して．

$$\delta(u) = u \circ \partial_p + (-1)^p \delta \circ u$$
$$= u \circ \partial_p + (-1)^p u \circ \partial_q + (-1)^{p+q} \delta_r \circ u$$
$$u \circ \partial_p \in \mathrm{Hom}(\overline{\omega}_{p-1}$$
$$\delta(P \circ u) = (P \circ u)\partial + (-1)^{p+q} \delta_r (P \circ u)$$
$$= (P \circ u)\partial_p \otimes \mathrm{id} + (-1)^p (P \circ u)\, \mathrm{id} \otimes \partial_q + (-1)^{p+q} \delta_r (P \circ u)$$

$$P(u \circ \partial_p)(w \otimes e_1 \otimes e_2)$$
$$= (u \circ \partial_p w)(e_1 \otimes e_2)$$
$$= P(u)(\partial_p w \otimes e_1 \otimes e_2)$$
$$= P(u)(\partial_p \otimes \mathrm{id})(w \otimes e_1 \otimes e_2)$$

$$P(u \circ \partial_q)(w \otimes e_1 \otimes e_2)$$
$$= u(w)(\partial_q(e_1 \otimes e_2))$$
$$= P(u)(w \otimes \partial_q(e_1 \otimes e_2))$$
$$= P(u)(\mathrm{id} \otimes \partial_q)(w \otimes e_1 \otimes e_2)$$

$$P(\delta_r \circ u)(w \otimes e_1 \otimes e_2)$$
$$= \delta_r \circ u(w)(e_1 \otimes e_2)$$
$$= \delta_r \circ P(u)(w \otimes e_1 \otimes e_2)$$

以上よりチェインマップである．

$P: \mathrm{Hom}(\varpi, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)})) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varpi \otimes I^{(2)}, C'^{(2)})$ はチェインマップである.

$u \in \mathrm{Hom}(\varpi_p, \mathrm{Hom}(I^{(2)}_q, C'^{(2)}_r))$ に対して.

$\delta(u) = u \circ \partial_{p+1} + (-1)^p \delta \circ u.$

ここで $u \circ \partial_{p+1} \in \mathrm{Hom}(\varpi_{p+1}, \mathrm{Hom}(I^{(2)}_q, C'^{(2)}_r))$
$\delta \circ u \in \mathrm{Hom}(\varpi_p, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)})_{q+r+1})$

$\delta \circ u(w_p) = u(w_p)\partial_{q+1} + (-1)^q \delta \circ u(w_p)$

$\delta(u) \longmapsto (u \circ \partial_{p+1}(w_{p+1}))(e_1 \otimes e_2)$
$u(w_p)(\partial_{q+1} e_1 \otimes e_2)$
$\delta \circ u(w_p)(e_1 \otimes e_2)$

$\delta(P \circ u) = (P \circ u)\partial_{p+1} + (-1)^{p+q} \delta_r (P \circ u)$
$= (P \circ u)\partial_{p+1} \otimes id + (-1)^p (P \circ u)\, id \otimes \partial_{q+1} + (-1)^{p+q} \delta_r (P \circ u)$

$P(u \circ \partial_{p+1}(w_{p+1}))(e_1 \otimes e_2)$
$= u^\#(\partial_{p+1}(w_{p+1}) \otimes e_1 \otimes e_2)$
$= P(u)(\partial_{p+1} \otimes id)(w_{p+1} \otimes e_1 \otimes e_2)$

$P(u(w_p)(\partial_{q+1}(e_1 \otimes e_2))$
$= u^\#(w_p \otimes \partial_{q+1}(e_1 \otimes e_2))$
$= P(u)(id \otimes \partial_{q+1})(w_p \otimes e_1 \otimes e_2)$

$P(\delta \circ u(w_p)(e_1 \otimes e_2))$
$= \delta \circ u^\#(w_p \otimes e_1 \otimes e_2)$
$= \delta \circ P(u)(w_p \otimes e_1 \otimes e_2)$

以上より P はチェインマップである.

逆に $Q\quad \mathrm{Hom}(\varpi\otimes I^{(2)}, C^{(2)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varpi, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C^{(2)}))$ を

$$g \longmapsto u$$

g に対して $g(w\otimes e_1\otimes e_2) = c_1\otimes c_2$ とする時、

$[u(w)](e_1\otimes e_2) = c_1\otimes c_2$ と定義する。

(i) u は well-defined である。

$\Sigma w_i = \Sigma w_j$ とする時

$$0 = [u(\Sigma w_i - \Sigma w_j)](e_1\otimes e_2) = [u(\Sigma w_i)](e_1\otimes e_2) - [u(\Sigma w_j)](e_1\otimes e_2)$$

故に $[u(\Sigma w_i)](e_1\otimes e_2) = [u(\Sigma w_j)](e_1\otimes e_2)$

$\Sigma e_i\otimes e_i' = \Sigma e_j\otimes e_j'$ とする時、

$$0 = [u(w_i)](\Sigma e_i\otimes e_i' - \Sigma e_j\otimes e_j')$$
$$= [u(w_i)](\Sigma e_i\otimes e_i') - u(w_i)(\Sigma e_j\otimes e_j')$$

故に $[u(w_i)](\Sigma e_i\otimes e_i') = [u(w_i)](\Sigma e_j\otimes e_j')$

故に $[u(\Sigma w_i)](\Sigma e_i\otimes e_i') = [u(\Sigma w_j)](\Sigma e_i\otimes e_i')$
$= [u(\Sigma w_j)](\Sigma e_j\otimes e_j')$ であり

Base の取り方によらない。

(ii) u は $u\in \mathrm{Hom}(\varpi, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C^{(2)}))$ である。

$$[u(w+w')](e_1\otimes e_2) = g((w+w')\otimes e_1\otimes e_2)$$
$$= g(w\otimes e_1\otimes e_2) + g(w'\otimes e_1\otimes e_2)$$
$$= [u(w)](e_1\otimes e_2) + [u(w')](e_1\otimes e_2)$$

$$[u(w\cdot r)](e_1\otimes e_2) = g(r.w\otimes e_1\otimes e_2)$$
$$= r\cdot g(w\otimes e_1\otimes e_2)$$
$$= g(w\otimes r(e_1\otimes e_2))$$
$$= [u(w)](r\, e_1\otimes e_2)$$
$$= [r(u(w))](e_1\otimes e_2)$$

$$[u(w)](e_1\otimes e_2 + e_1'\otimes e_2') = g(w\otimes(e_1\otimes e_2 + e_1'\otimes e_2'))$$
$$= g(w\otimes e_1\otimes e_2 + w\otimes e_1'\otimes e_2')$$
$$= g(w\otimes e_1\otimes e_2) + g(w\otimes e_1'\otimes e_2')$$
$$= [u(w)](e_1\otimes e_2) + [u(w)](e_1'\otimes e_2')$$

また、Pは同型対応である。

実際　$u, u' \in \mathrm{Hom}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C^{(2)}))$ に対して

$$
\begin{aligned}
P(u+u')(w\otimes e_1\otimes e_2) &= [(u+u')(w)](e_1\otimes e_2)\\
&= [u(w)+u'(w)](e_1\otimes e_2)\\
&= [u(w)](e_1\otimes e_2)+[u'(w)](e_1\otimes e_2)\\
&= P(u)(w\otimes e_1\otimes e_2)+P(u')(w\otimes e_1\otimes e_2)\\
&= (P(u)+P(u'))(w\otimes e_1\otimes e_2)
\end{aligned}
$$

故に　$P(u+u') = P(u)+P(u')$

$$
\begin{aligned}
P(r\cdot u)(w\otimes e_1\otimes e_2) &= [(r\cdot u)(w)](e_1\otimes e_2)\\
&= [u(rw)](e_1\otimes e_2)\\
&= [r\cdot(u(w))](e_1\otimes e_2)\\
&= [u(w)](r\cdot e_1\otimes e_2)\\
&= (r\cdot P(u))(e_1\otimes e_2)
\end{aligned}
$$

故に $P(r\cdot u) = r\cdot P(u)$

以上より　Pは R準同型である。

さらに　$Q\circ P = id$ である。

$$u(w)(e_1\otimes e_2) = P(u)(w\otimes e_1\otimes e_2)$$

$$
\begin{aligned}
[[Q\circ P(u)](w)](e_1\otimes e_2) &= P(u)(w\otimes e_1\otimes e_2)\\
&= u(w)(e_1\otimes e_2)
\end{aligned}
$$

また、$P\circ Q = id$ である。

$$[[Q(g)](w)](e_1\otimes e_2) = g(w\otimes e_1\otimes e_2)$$

$$
\begin{aligned}
[P\circ Q(g)](w\otimes e_1\otimes e_2) &= [[Q(g)](w)](e_1\otimes e_2)\\
&= g(w\otimes e_1\otimes e_2)
\end{aligned}
$$

以上より　$P : \mathrm{Hom}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C^{(2)})) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\overline{W}\otimes I^{(2)}, C^{(2)})$ は自然な同型対応である。

$\delta : \mathrm{Hom}(C\otimes C', D) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C\otimes C', D)$ を次で定義する.

$u \in \mathrm{Hom}(C_p\otimes C'_q, D_r)$

注意

$$\delta\circ u = u\circ\partial_{p+1}\otimes id + (-1)^p u\circ id\otimes\partial_{q+1} + (-1)^{p+q}\,\delta\circ u.$$

$$\begin{aligned}\delta\circ\delta\circ u &= \delta(u\circ\partial_{p+1}\otimes id + (-1)^p u\circ id\otimes\partial_{q+1} + (-1)^{p+q}\delta\circ u)\\
&= u\circ(\partial_{p+1}\otimes id)(\partial_{p+2}\otimes id) + (-1)^{p+1}u\circ(\partial_{p+1}\otimes id)(id\otimes\partial_{q+1})\\
&\qquad + (-1)^{p+q+1}\,\delta\circ u(\partial_{p+1}\otimes id)\\
&\quad + (-1)^p u\circ(id\otimes\partial_{q+1})(\partial_{p+1}\otimes id) + (-1)^{p+p}u(id\otimes\partial_{q+1})(id\otimes\partial_{q+2})\\
&\qquad + (-1)^{p+p+q+1}\,\delta\circ u(id\otimes\partial_{q+1})\\
&\quad + (-1)^{p+q}\,\delta\circ u(\partial_{p+1}\otimes id) + (-1)^{p+q+p}\,\delta\circ u(id\otimes\partial_{q+1})\\
&\qquad + (-1)^{p+q+p+q+1}\,\delta\circ\delta\circ u\\
&= 0\end{aligned}$$

故に δ はコバウンダリー作用素である.

$$\delta : (\mathrm{Hom}(C\otimes C', D))_n \longrightarrow (\mathrm{Hom}(C\otimes C', D))_{n+1}$$

$$\begin{aligned}&\ \ \| \\ &\mathrm{Hom}(\oplus(C_p\otimes C'_q),\ D_{n-p-q})\\ &\ \ \| \\ &\oplus(\mathrm{Hom}(C_p\otimes C'_q\ \ D_{n-p-q}))\end{aligned}$$

(第6段)

$\mathrm{Hom}(\overline{W}, C^{(2)}) \xrightarrow{\widehat{\Phi}_{\#}^{(2)}} \mathrm{Hom}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(I, C')^{(2)})$ が

$\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, C^{(2)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(I\ C')^{(2)})$ を誘導し cochain map である.

$u \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, C^{(2)})$ に対して.

$u(w) = \Sigma c_i \otimes c_j$ とすると $u(Tw) = T \cdot u(w) = (-1)^{|c_i||c_j|} c_j \otimes c_i$ であり

$u((r_1 + r_2 T)w) = r_1 \Sigma c_i \otimes c_j + r_2 \cdot (-1)^{|c_i||c_j|} c_j \otimes c_i$

$\Phi^{(2)} \circ u(w) = \Sigma\, \Phi(c_i) \otimes \Phi(c_j)$

$\Phi^{(2)} \circ u((r_1 + r_2 T)w) = r_1 \Sigma \Phi(c_i) \otimes \Phi(c_j) + r_2 \cdot (-1)^{|c_i||c_j|} \Phi(c_j) \otimes \Phi(c_i)$

$= (r_1 + r_2 T)\, \Phi^{(2)} u(w)$

故に $\widehat{\Phi}_{\#}^{(2)} : \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, C^{(2)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(I\ C')^{(2)})$ を誘導する.

次に cochain map であることを示す.

$u \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}_p, \Sigma C_q \otimes C_r)$

$\delta(\Phi^{(2)} \circ u) = \Phi^{(2)} \circ u \circ \partial_{p+1} + (-1)^p \delta_{n-p} \circ \Phi^{(2)}_{q,r} u$

$= \Phi^{(2)} \circ u \circ \partial_{p+1} + (-1)^p \Big(\sum_q (\delta_q \otimes id)(\Phi \otimes \Phi) \circ u$

$+ \sum_r (-1)^{n+r} (id \otimes \delta_r)(\Phi \otimes \Phi) \circ u$

$= \Phi^{(2)} \circ u \circ \partial_{p+1} + (-1)^p \Big(\sum_q (\Phi \otimes \Phi)(\delta_q \otimes id) \circ u \Big)$

$+ \sum_r (-1)^{n+r} (\Phi \otimes \Phi)(id \otimes \delta_r) \circ u$

$= \Phi^{(2)} \circ (\delta u)$

故に cochain map である.

(第7段)

$L^{\#}: \mathrm{Hom}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(I, C)^{(2)}) \xrightarrow{L^{\#}} \mathrm{Hom}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C^{(2)}))$ は

$\mathrm{Hom}_{R\Pi}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(I, C)^{(2)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\Pi}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C^{(2)}))$ を

誘導し cochain map である.

[定義]

$u \in \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C^{(2)})$ に対して.

$u(e_2 \otimes e_1) = \sum c_i' \otimes c_i$ とする時

$(Tu)(e_1 \otimes e_2) = \sum (-1)^{|c_i||c_i'| + |e_1||e_2|} c_i \otimes c_i'$

$= T \circ u(T(e_1 \otimes e_2))$

と定義する.

$(T^2 u)(e_1 \otimes e_2) = T \circ T \circ u(T(T(e_1 \otimes e_2))) = u$

故に $T^2 = id$ である.

特に $u = f \otimes g$ の時 $f \in \mathrm{Hom}(I_p, C^h)$ $g \in \mathrm{Hom}(I_q, C^k)$

$(T(f \otimes g))(e_1 \otimes e_2) = (-1)^{hk + p \cdot q} g(e_2) \otimes f(e_1)$

[RΠの証明]

$g \in \mathrm{Hom}_{R\Pi}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(I, C)^{(2)})$ に対して.

$g(w) = \sum [f_i] \otimes [g_i]$ $[f_i] \in \mathrm{Hom}(I_p, C^h)$

$[g_i] \in \mathrm{Hom}(I_q, C^k)$ とする.

$[g(Tw)](e_1 \otimes e_2) = \sum (-1)^{|f_i||g_i|} g_i(e_2) \otimes f_i(e_1)$

$[(L^{\#} \circ u)(Tw)](e_1 \otimes e_2) = \sum (-1)^{|f_i||g_i| + p \cdot k} g_i(e_2) \otimes f_i(e_1)$

と定義する.

証明すべきこと

$L^{\#}(u)(Tw)$ が $TL^{\#}(u)(w)$ に等しいこと

$(u)(Tw)(e_1 \otimes e_2) = T \circ u(w) \circ T$ で定義する.

$g \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(I, C')^{(2)})$ に対して.

$g(w) = \sum [t_i] \otimes [g_i]$ $\quad$ $[t_i] \in \mathrm{Hom}(I_p, C'^h)$

$[g_i] \in \mathrm{Hom}(I_q, C'^k)$ とする.

$$L \circ g(w) = \sum (-1)^{h \cdot q} [t_i \otimes g_i](e_1 \otimes e_2)$$

$$g(Tw) = \sum (-1)^{|t_i||g_i|} [g_i] \otimes [t_i](e_2 \otimes e_1)$$

$$L \circ g(Tw) = \sum (-1)^{|t_i||g_i| + p \cdot k} [g_i \otimes t_i](e_2 \otimes e_1)$$

$$L^{\#}(g)(w) = L \circ g(w) = \sum (-1)^{h \cdot q} [t_i \otimes g_i].$$

$$(TL^{\#}(g))(w) = \sum (-1)^{h \cdot k + h \cdot q + p \cdot q} [g_i \otimes t_i](e_2 \otimes e_1).$$

故に. $L^{\#}(g)(Tw) = TL^{\#}(g)(w)$

$\delta : \mathrm{Hom}_{R\Pi}(\varpi, \mathrm{Hom}(I, C')^{(2)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\Pi}(\varpi, \mathrm{Hom}(I, C')^{(2)})$ である.

$\rotatebox{90}{$\in$}$
u

$$\delta \circ u = u \circ \partial_{p+1} + (-1)^p \delta \circ u$$

u が $R\Pi$ 準同型. ∂_{p+1}, δ も $R\Pi$ 準同型
よって $\delta \circ u$ も $R\Pi$ 準同型である.

$\delta : \mathrm{Hom}_{R\Pi}(\varpi, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\Pi}(\varpi, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)}))$ である.

$\rotatebox{90}{$\in$}$
g

$$g(T\omega) = (T\cdot g)(\omega) \qquad [(T\cdot g)(\omega)](e_1 \otimes e_2)$$
$$= T \circ g(\omega)(T(e_1 \otimes e_2))$$

$\delta : \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)})$ は $R\Pi$ 準同型である.

$\rotatebox{90}{$\in$}$
u

$$\delta(T\cdot u(e_1 \otimes e_2)) = \delta \circ T \circ u(T(e_1 \otimes e_2))$$
$$= T \circ u(T(\partial(e_1 \otimes e_2))) + (-1)^{|e_1|+|e_2|} \delta \circ T \circ u(T(e_1 \otimes e_2))$$

$$(T\cdot \delta u)(e_1 \otimes e_2) = T \circ (\delta u)(T(e_1 \otimes e_2))$$
$$= T \circ (u \circ \partial + (-1)^{|e_1|+|e_2|} \delta \circ u)(T(e_1 \otimes e_2))$$
$$= T \circ u \circ \partial(T(e_1 \otimes e_2)) + (-1)^{|e_1|+|e_2|} T \circ \delta \circ u(T(e_1 \otimes e_2)) \quad \cdots\cdots (1)$$

$I^{(2)} \xrightarrow{\partial} I^{(2)}$

$$\partial(T(e_1 \otimes e_2)) = \partial((-1)^{|e_1||e_2|} e_2 \otimes e_1)$$
$$= (-1)^{|e_1||e_2|} \partial e_2 \otimes e_1 + (-1)^{|e_1||e_2|+|e_2|} e_2 \otimes \partial e_1$$
$$= T(\partial e_1 \otimes e_2 + (-1)^{|e_1|} e_1 \otimes \partial e_2)$$
$$= T(\partial(e_1 \otimes e_2))$$

故に $T \circ \partial = \partial \circ T$
故に ∂ は $R\Pi$ 準同型である.

$\delta : C'\otimes C' \longrightarrow C'\otimes C'$ は $R\pi$準同型である.

$\quad\ \ \rotatebox{90}{$\in$}$
$a\otimes b$

$$\begin{aligned}
\delta(T(a\otimes b)) &= \delta((-1)^{|a||b|}\, b\otimes a) \\
&= (-1)^{|a||b|}\, \delta b\otimes a + (-1)^{|a||b|}\, b\otimes \delta a \times (-1)^{|b|} \\
&= T(\ (-1)^{|a|}\, a\otimes \delta b + \delta a\otimes b) \\
&= T(\ \delta(a\otimes b))
\end{aligned}$$

故に $\delta\circ T = T\circ\delta$ である.
故に δ は $R\pi$準同型である.

Page 46……(1)

$$\begin{aligned}
(T\cdot\delta u)(e_1\otimes e_2) &= T\circ u\circ\partial(T(e_1\otimes e_2)) + (-1)^{|e_1|+|e_2|}\, T\circ\delta\circ u(T(e_1\otimes e_2)) \\
&= T\circ u\circ T(\partial(e_1\otimes e_2)) + (-1)^{|e_1|+|e_2|}\, \delta\circ T\circ u(T(e_1\otimes e_2)) \\
&= \delta(T\cdot u)(e_1\otimes e_2)
\end{aligned}$$

よって $\delta : \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)})$ は $R\pi$準同型である.

$\delta:\ \mathrm{Hom}_{R\pi}(W, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\pi}(W, \mathrm{Hom}(I^{(2)}, C'^{(2)}))$ である.

実際 $\quad \rotatebox{90}{$\in$}$
$\qquad\quad u$

$$\delta u = u\circ\partial + (-1)^p\, \delta'\circ u.$$

u $R\pi$準同型
∂ $R\pi$準同型
δ' $R\pi$準同型 より

δは $R\pi$準同型である.

著者　泉　宏明

住所　〒739-0145　　広島県東広島市八本松町宗吉 92-5

HomePage

http://www7a.biglobe.ne.jp/~popuri_art/izumi/