$W^{(2)} = W \otimes W$ を $T(\omega \otimes \omega') = T\omega \otimes T\omega'$ ($\omega, \omega' \in W$) により R[T]チェイン複体とみなす。その時、R[T]チェイン写像 $\lambda : W \to W^{(2)}$ を次のように定義する。

$$\lambda(\omega_i) = \sum_{j=0}^{[i/2]} (\omega_{2j} \otimes \omega_{i-2j} + \omega_{2j+1} \otimes T\omega_{i-2j-1})$$

この model は $S^\infty \xrightarrow{d} S^\infty \times S^\infty$ (対角写像) の前述の cw 分割に対する equivariant diagonal approximation である。

λは chain map であることが次のように示される。

$$\begin{aligned}
\partial \lambda(\omega_i) = \sum_{j=0}^{[i/2]} \{ & (T+(-1)^{2j})\omega_{2j-1} \otimes \omega_{i-2j} \\
& + \omega_{2j} \otimes (T+(-1)^{i-2j})\omega_{i-2j-1} \\
& + (T+(-1)^{2j+1})\omega_{2j} \otimes T\omega_{i-2j-1} \\
& + (-1)^{2j+1}\omega_{2j+1} \otimes T(T+(-1)^{i-2j-1})\omega_{i-2j-2} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \sum_{j=0}^{[i/2]} \{ & T\omega_{2j-1} \otimes \omega_{i-2j} + \omega_{2j-1} \otimes \omega_{i-2j} \\
& + \omega_{2j} \otimes T\omega_{i-2j-1} + (-1)^i \omega_{2j} \otimes \omega_{i-2j-1} \\
& + T\omega_{2j} \otimes T\omega_{i-2j-1} + (-1) \times \omega_{2j} \otimes T\omega_{i-2j-1} \\
& + (-1) \times \omega_{2j+1} \otimes \omega_{i-2j-2} + (-1)^i \omega_{2j+1} \otimes T\omega_{i-2j-2} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \sum_{j=0}^{[i/2]} \{ & T\omega_{2j-1} \otimes \omega_{i-2j} + (-1)^i \omega_{2j} \otimes \omega_{i-2j-1} \\
& + T\omega_{2j} \otimes T\omega_{i-2j-1} + (-1)^i \omega_{2j+1} \otimes T\omega_{i-2j-2} \} \quad \text{—— (1)}
\end{aligned}$$

$i = 2m$

$$\sum_{j=0}^{[i/2]} \omega_{2j-1} \otimes \omega_{i-2j} = \omega_1 \otimes \omega_{2m-2} + \omega_3 \otimes \omega_{2m-4} \cdots\cdots + \omega_{2m-1} \otimes \omega_0$$

$$+\sum_{j=0}^{[i/2]} \omega_{2j+1} \otimes \omega_{i-2j-2} = \omega_1 \otimes \omega_{2m-2} + \omega_3 \otimes \omega_{2m-4} + \omega_{2m-1} \otimes \omega_0$$

$i = 2m+1$

$$\sum_{j=0}^{m} \omega_{2j-1} \otimes \omega_{i-2j} = \omega_1 \otimes \omega_{2m-1} + \omega_3 \otimes \omega_{2m-3} \cdots\cdots + \omega_{2m-1} \otimes \omega_1$$

$$\sum_{j=0}^{m} \omega_{2j+1} \otimes \omega_{i-2j-2} = \omega_1 \otimes \omega_{2m-1} \cdots\cdots + \omega_{2m-1} \otimes \omega_1$$

より 上記のことが言える。

一方、

$$\lambda\, \partial w_i = \lambda\left(T + (-1)^i\right) w_{i-1}$$

$$= \left(T + (-1)^i\right) \sum_{j=0}^{[i/2]} \left(w_{2j} \otimes w_{i-2j-1} + w_{2j+1} \otimes T w_{i-2j-2} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{[i/2]} \Big\{ T w_{2j} \otimes T w_{i-2j-1} + T w_{2j+1} \otimes w_{i-2j-2}$$

$$+ (-1)^i w_{2j} \otimes w_{i-2j-1} + (-1)^i w_{2j+1} \otimes T w_{i-2j-2} \Big\} \quad —— (2)$$

(1) = (2) である。

実際

(i) $i = 2m$

(1) の $\sum T w_{2j-1} \otimes w_{i-2j} = T w_1 \otimes w_{i-2} + \cdots T_{2m-1} \otimes w_0$

(2) の $\sum T w_{2j+1} \otimes w_{i-2j-2} = T w_1 \otimes w_{i-2} \cdots + T_{2m-1} \otimes w_0$

$i = 2m+1$

(1) の $\sum T w_{2j-1} \otimes w_{i-2j} = T w_1 \otimes w_{i-2} + \cdots + T_{2m-1} \otimes w_1$

(2) の $\sum T w_{2j+1} \otimes w_{i-2j-2} = T w_1 \otimes w_{i-2} + \cdots\cdots + T_{2m-1} \otimes w_1$

(ii) $i = 2m$.

$2m-1/2 = m-1$

(1) の $\sum (-1)^i w_{2j} \otimes w_{i-2j-1} = w_0 \otimes w_{i-1} + \cdots\cdots + w_{2m-2} \otimes w_1$

(2) の $\sum (-1)^i w_{2j} \otimes w_{i-2j-1} = w_0 \otimes w_{i-1} + \cdots\cdots + w_{2m-2} \otimes w_1$

$i = 2m+1$

$j = 0 \sim m$

(1) の $\sum (-1)^i w_{2j} \otimes w_{i-2j-1} = (-1) w_0 \otimes w_{i-1} \cdots\cdots + (-1) w_{2m} \otimes w_0.$

(2) の $\sum (-1)^i w_{2j} \otimes w_{i-2j-1} = (-1) w_0 \otimes w_{i-1} \quad + (-1) w_{2m} \otimes w_0.$

(iii) $i = 2m$.

(1) の $\sum_{j=0}^{[i/2]} T w_{2j} \otimes T w_{i-2j-1} = T w_0 \otimes T w_{i-1} \cdots\cdots + T w_{2m-2} \otimes T w_1$

(2) の $\sum T w_{2j} \otimes T w_{i-2j-1} = T w_0 \otimes T w_{i-1} \quad + T w_{2m-2} \otimes T w_1$

$i = 2m+1$.

$j = 0 \sim m$.

(1) の $\sum T w_{2j} \otimes T w_{i-2j-1} = T w_0 \otimes T w_{i-1} \cdots\cdots + T w_{2m} \otimes T w_0.$

(2) の $\sum T w_{2j} \otimes T w_{i-2j-1} = T w_0 \otimes T w_{i-1} \cdots\cdots + T w_{2m} \otimes T w_0.$

(iv) $i = 2m$

(1) の $\sum (-1)^i w_{2j+1} \otimes T w_{i-2j-2} = w_1 \otimes T w_{i-2} \cdots\cdots + w_{2m-1} \otimes T w_0.$

(2) の $\sum (-1)^i w_{2j+1} \otimes T w_{i-2j-2} = w_1 \otimes T w_{i-2} \cdots + w_{2m-1} \otimes T w_0.$

$i = 2m+1$.

$j = 0 \sim m$.

(1) の $\sum (-1)^i w_{2j+1} \otimes T w_{i-2j-2} = (-1) w_1 \otimes T w_{i-2} \cdots\cdots + (-1) w_{2m-1} \otimes T w_1$

(2) の $\sum (-1)^i w_{2j+1} \otimes T w_{i-2j-2} = (-1) w_1 \otimes T w_{i-2} \quad + (-1) w_{2m-1} \otimes T w_1$

以上の (i)〜(iii) より $\partial\lambda(w_i) = \lambda\circ\partial(w_i)$

Tw_i に対しては $\lambda(Tw_i) = T\cdot\lambda(w_i)$ で定義するから

$$\partial\lambda(Tw_i) = \partial T\lambda(w_i) = T\cdot\partial\lambda(w_i)$$
$$= T\lambda\partial(w_i)$$
$$= \lambda T\partial(w_i)$$
$$= \lambda\partial(Tw_i)$$

以上より $\partial\lambda = \lambda\partial$ であり chain map である.

$H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\varpi, H^*(X)^{(2)}))$ における cup product を定義する.

$u \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\varpi_p, (H^*(X)^{(2)})^q)$
$v \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\varpi_{p'}, (H^*(X)^{(2)})^{q'})$ に対して.

$u \smile v \in \mathrm{Hom}(\varpi, H^*(X)^{(2)})$ を次のように定義する.

$$\varpi \xrightarrow{\lambda} \varpi \otimes \varpi \xrightarrow{h} H^*(X)^{(2)} \otimes H^*(X)^{(2)} \xrightarrow{\smile} H^*(X)^{(2)}$$

h は $h(w_i \otimes w_j) = (-1)^{q \cdot p'} u(w_i) \otimes v(w_j)$ とする.

$\smile$ は $\smile(\alpha \otimes \alpha' \otimes \beta \otimes \beta') = (-1)^{|\alpha'||\beta|} (\alpha \smile \beta) \otimes (\alpha' \smile \beta')$ で定義される準同型

$u, v \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\varpi, H^*(X)^{(2)})$
$\Rightarrow u \smile v \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\varpi, H^*(X)^{(2)})$ である.

実際

λ は $R\pi$ 準同型であり h も $R\pi$ 準同型であることが次のように示される.

$$h((r_1 + r_2 T) \cdot w_i \otimes w_j) = h(r_1 \cdot w_i \otimes w_j + r_2 Tw_i \otimes Tw_j)$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{q \cdot p'} r_1 u(w_i) \otimes v(w_j) + r_2 (-1)^{q \cdot p'} u(Tw_i) \otimes v(Tw_j) \\
&= (-1)^{q \cdot p'} r_1 u(w_i) \otimes v(w_j) + r_2 (-1)^{q \cdot p'} Tu(w_i) \otimes Tv(w_j) \\
&= r_1 \cdot h(w_i \otimes w_j) + r_2 \cdot T (-1)^{q \cdot p'} u(w_i) \otimes v(w_j) \\
&= (r_1 + r_2 T) h(w_i \otimes w_j)
\end{aligned}$$

以上より h は $R\pi$ 準同型である.

νも次準同型である.

$$\nu(T(\alpha\otimes\alpha')\otimes T(\beta\otimes\beta'))$$
$$= (-1)^{|\alpha'||\alpha|+|\beta||\beta'|}\nu(\alpha'\otimes\alpha\otimes\beta'\otimes\beta)$$
$$= (-1)^{|\alpha'||\alpha|+|\beta||\beta'|+|\alpha||\beta'|}\alpha'\smile\beta'\otimes\alpha\smile\beta$$
$$= (-1)^{(|\alpha'|+|\beta'|)(|\alpha|+|\beta|)}\cdot(-1)^{|\alpha'||\beta|}\alpha\smile\beta'\otimes\alpha\smile\beta$$
$$= T(\alpha\smile\beta\otimes\alpha'\smile\beta'\times(-1)^{|\alpha'||\beta|})$$
$$= T\nu(\alpha\otimes\alpha'\otimes\beta\otimes\beta')$$

故に $\nu((r_1+r_2T)\cdot\alpha\otimes\alpha'\otimes\beta\otimes\beta')$
$$= r_1\nu(\alpha\otimes\alpha'\otimes\beta\otimes\beta') + r_2\cdot\nu(T(\alpha\otimes\alpha'\otimes\beta\otimes\beta'))$$
$$= (r_1+r_2T)\,\nu(\alpha\otimes\alpha'\otimes\beta\otimes\beta')$$

故にνは次準同型である.

以上より $\nu\circ h\circ\lambda$は次準同型であり

$u\smile v\in Hom_{R\pi}(W, H^*(X)^{(2)})$ である.

また $\delta(u \smile v) = \delta u \smile v + (-1)^{|u|} u \smile \delta v$ が成立する.
ただし, $\delta : H^*(X) \longrightarrow H^{*+1}(X)$ は $\delta = 0$ により cochain map と見なす.

$$u \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}_p, (H^*(X)^{(2)})^q)$$
$$v \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}_{p'}, (H^*(X)^{(2)})^{q'})$$
$$u \smile v \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}_{p+p'}, (H^*(X)^{(2)})^{q+q'})$$
$$u \circ \partial \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}_{p+1}, (H^*(X)^{(2)})^{q})$$
$$v \circ \partial \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}_{p'+1}, (H^*(X)^{(2)})^{q'})$$

$$\lambda(\omega_{p+p'+1}) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{p+p'+1}{2}\right]} \{ \omega_{2j} \otimes \omega_{p+p'+1-2j} + \omega_{2j+1} \otimes T\omega_{p+p'-2j} \}$$

p が偶数の時. $\quad \omega_p \otimes \omega_{p'+1} + \omega_{p+1} \otimes T\omega_{p'} + \sum_{\substack{i \neq p, p+1 \\ j \neq p, p+1}} \alpha_i' \otimes e_j$

p が奇数の時. $\quad \omega_p \otimes T\omega_{p'+1} + \omega_{p+1} \otimes \omega_{p'} + \sum_{\substack{i \neq p, p+1 \\ j \neq p, p+1}} \alpha_i \otimes e_j$

$p = 2m$ の時

$$\begin{aligned}
\delta(u \smile v)(\omega_{p+p'+1}) &= (u \smile v) \circ \partial (\overline{\omega}_{p+p'+1}) \\
&= (u \smile v)(\partial(\omega_p \otimes \omega_{p'+1} + \omega_{p+1} \otimes T\omega_{p'})) \\
&= (u \smile v)(\partial\omega_p \otimes \omega_{p'+1} + (-1)^p \omega_p \otimes \partial\omega_{p'+1} \\
&\qquad + \partial\omega_{p+1} \otimes T\omega_p + (-1)^{p+1}\omega_{p+1} \otimes \partial T\omega_p) \\
&= (-1)^p \times (-1)^{q \cdot p'} \mu(u(\omega_p) \otimes v \circ \partial \omega_{p'+1}) \\
&\quad + (-1)^{q \cdot p'} \mu(u \circ \partial(\omega_{p+1}) \otimes v(T\omega_p))
\end{aligned}$$

$$\delta u \smile v(\omega_{p+p'+1}) = (-1)^{p' \cdot q} \mu(u \circ \partial(\omega_{p+1}) \otimes v(T\omega_p))$$
$$u \smile \delta v(\omega_{p+p'+1}) = (-1)^{(p'+1) \cdot q} \mu(u(\omega_p) \otimes v(\partial\omega_{p'+1}))$$

故に $\delta(u \smile v) = \delta u \smile v + (-1)^{|u|} u \smile \delta v$ が成立する.

P=2四+1の時も同様

$$\delta(u\smile v) = (u\smile v)\circ\partial(\omega_{p+p'+1})$$
$$= (u\smile v)(\partial(\omega_p\otimes T\omega_{p'+1} + \omega_{p+1}\otimes\omega_{p'})$$
$$= (u\smile v)(\partial\omega_p\otimes T\omega_{p'+1} + (-1)^p\omega_p\otimes\partial T\omega_{p'+1}$$
$$\partial\omega_{p+1}\otimes\omega_{p'} + (-1)^{p+1}\omega_{p+1}\otimes\partial\omega_{p'})$$
$$= (-1)^p\times(-1)^{q\cdot p'}\mu(u(\omega_p)\otimes v(\partial T\omega_{p'+1}))$$
$$+ (-1)^{q\cdot p'}\mu(u\circ\partial\omega_{p+1}\otimes v(\omega_{p'}))$$

$$\delta u\smile v(\omega_{p+p'+1}) = (-1)^{p\cdot q}\mu(u\circ\partial(\omega_{p+1})\otimes v(\omega_{p'}))$$

$$u\smile\delta v(\omega_{p+p'+1}) = (-1)^{(p'+1)\cdot q}\mu(u(\omega_p)\otimes v\circ\partial(T\omega_{p'+1}))$$

故に $\delta(u\smile v) = \delta u\smile v + (-1)^{|u|}u\smile\delta v$ が成立する.

$\delta(u \smile v) = \delta u \smile v + (-1)^{|u|} u \smile \delta v$ より

$u \in Z^{p+q}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\pi}(\overline{W}_p, (H^*(X)^{(2)})^q)$
$v \in Z^{p'+q'}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\pi}(\overline{W}_{p'}(H^*(X)^{(2)})^{q'})$ ならば.

$u \smile v \in Z^{p+p'+q+q'}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\pi}(\overline{W}_{p+p'}, (H^*(X)^{(2)})^{q+q'})$ であり,

また. $u \in B^{p+q}$ $v \in B^{p'+q'}$ ならば $u \smile v \in B^{p+q+p'+q'}$ であることがわかり
従って.
$u \in H^*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\pi}(\overline{W}_p\ (H^*(X)^{(2)})^q))$
$v \in H^*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\pi}(\overline{W}_{p'}\ (H^*(X)^{(2)})^{q'}))$ に対して.

$u \smile v \in H^*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\pi}(\overline{W}_{p+p'}, (H^*(X)^{(2)})^{q+q'}))$ が成り立つ.

Def 4　Cap Product の定義

$v \in \mathrm{Hom}(\overline{W}_p ; (H^*(X)^{(2)})^q)$
$c \in \overline{W}_{p'} \otimes (H_*(X)^{(2)})_{q'}$　に対し.

$\lambda \otimes id \quad \overline{W} \otimes H_*(X)^{(2)} \longrightarrow \overline{W}^{(2)} \otimes H_*(X)^{(2)}$
$c = w_p \otimes a_1 \otimes a_2 \longmapsto \sum_i r_i (c_i \otimes c_i' \otimes a_i \otimes a_i')$ とおく.

$v \frown c \in \overline{W} \otimes H_*(X)^{(2)}$ を次で定義する.

$$v \frown c = \sum_i (-1)^{p(q'-q)} r_i c_i \otimes \mathcal{U}(v(c_i') \otimes a_i \otimes a_i')$$

ここで　$\mathcal{U}$　$H^*(X)^{(2)} \otimes H_*(X)^{(2)} \longrightarrow H_*(X)^{(2)}$ を,
$\alpha \otimes \alpha' \otimes a \otimes a' = (-1)^{|\alpha'|(|a|-|\alpha'|)} \alpha \frown a \otimes \alpha' \frown a'$ で定義する.

まず $v \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}_p, (H^*(X))^q) \Rightarrow v \frown Tc = T(v \frown c)$ を示す.

$$v \frown Tc = \sum_i (-1)^{p(q'-q)} r_i Tc_i \otimes \mathcal{U}(Tv(c_i') \otimes T(a_i \otimes a_i'))$$ と.

$\mathcal{U}(T(\alpha \otimes \alpha') \otimes T(a \otimes a'))$
$= \mathcal{U}((-1)^{|\alpha||\alpha'| + |a||a'|} \alpha' \otimes \alpha \otimes a' \otimes a)$
$= (-1)^{|\alpha||\alpha'| + |a||a'| + |\alpha|(|a|-|\alpha|)} \alpha' \frown a' \otimes \alpha \frown a$
$= (-1)^{|a||a'| + |\alpha'||a|} \alpha' \frown a' \otimes \alpha \frown a$

一方,

$T\mathcal{U}(\alpha \otimes \alpha' \otimes a \otimes a')$
$= T((-1)^{|\alpha'|(|a'|-|\alpha'|)} \alpha \frown a \otimes \alpha' \frown a')$
$= (-1)^{|\alpha'||a'| - |\alpha'||\alpha'| + (|a|-|\alpha|)(|a'|-|\alpha'|)} \alpha' \frown a' \otimes \alpha \frown a$
$= (-1)^{|a||a'| + |a||\alpha'|} \alpha' \frown a' \otimes \alpha \frown a$

故に. $\mathcal{U}(T(\alpha \otimes \alpha') \otimes T(a \otimes a'))$
$= T\mathcal{U}(\alpha \otimes \alpha' \otimes a \otimes a')$

故に $v \frown Tc = T(v \frown c)$

$v \in \mathrm{Hom}(\overline{\omega}_p, (H^*(X)^{(2)})^q)$
$c \in \overline{\omega}_{p'} \otimes (H_*(X)^{(2)})_{q'}$ に対して.

$v \frown c \in \overline{\omega}_{p'-p} \otimes (H_*(X)^{(2)})_{q'-q}$.

$\partial c \in \overline{\omega}_{p'-1} \otimes (H_*(X)^{(2)})_{q'}$
$\delta v \in \mathrm{Hom}(\overline{\omega}_{p+1}, (H^*(X)^{(2)})^q)$
$\partial(v \frown c) \in \overline{\omega}_{p'-p-1} \otimes (H_*(X)^{(2)})_{q'-q}$.
$v \frown \partial c \in \overline{\omega}_{p'-p-1} \otimes (H_*(X)^{(2)})_{q'-q}$.
$\delta v \frown c \in \overline{\omega}_{p'-p-1} \otimes (H_*(X)^{(2)})_{q'-q}$.

$\partial(v \frown c) = \sum_i (-1)^{p(q'-q)} r_i \partial c_i \otimes \cup(v(c_i') \otimes a_i \otimes a_i')$
$\lambda \otimes id(\partial c) = \sum_i r_i \partial c_i \otimes c_i' \otimes a_i \otimes a_i'$
$+ (-1)^{|c_i|} r_i c_i \otimes \partial c_i' \otimes a_i \otimes a_i' \}$ より.

$v \frown \partial c = \sum_i r_i \{ (-1)^{p(q'-q)} \partial c_i \otimes \cup(v(c_i') \otimes a_i \otimes a_i')$
$+ (-1)^{p(q'-q)+|c_i|} c_i \otimes \cup(v(\partial c_i') \otimes a_i \otimes a_i') \}$
$\delta v \frown c = \sum_i (-1)^{(p+1)(q'-q)} r_i c_i \otimes \cup((v \circ \partial(c_i')) \otimes a_i \otimes a_i')$
$|c_i| = p'-p-1$
故に. $\partial(v \frown c) = v \frown \partial c + (-1)^{q'-q-1+p'-p-1} \delta v \frown c$.

故に $\partial(v \frown c) = v \frown \partial c + (-1)^{|c|-|v|} \delta v \frown c$.

以上により $v \frown c$ により $H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{\omega}, H^*(X)^{(2)}))$ の元と $H_*(\overline{\omega} \otimes_{R\pi} H_*(X)^{(2)})$ の元の cap product が $H_*(\overline{\omega} \otimes_{R\pi} H_*(X)^{(2)})$ の元として定義できる。

著者　泉　宏明

住所　〒739-0145　　広島県東広島市八本松町宗吉 92-5

HomePage

http://www7a.biglobe.ne.jp/~popuri_art/izumi/