定理　体K上の加群Mは線型独立極大系を持ち、それは基底である。

Mのうち線型独立な集合の全体をAとする。Aは包含関係に関し順序集合であり
任意の全順序部分集合 $B_i \neq \phi$ に対して $B' = \bigcup_{i \in L} B_i$ はその上界であり、B'はAの元である。
よって線型独立な極大系を持つ。

次に極大系は基底であることを示す。
もし、$x \in M$ が極大系B_0の線型結合で表わせないとする。

$$x \neq \sum \alpha_i x_i \in B_0 \quad (\forall \alpha_i)$$

$$x - \sum \alpha_i x_i \neq 0 \quad (\forall \alpha_i) \qquad \text{―――――― (1)}$$

この時 $\{x\} \cup B_0$ は $B_0 \subset \{x\} \cup B_0$ であり線型独立系である。
実際、

$$\alpha_{i_0} x + \sum \alpha_i x_i = 0 \text{ とすると } \alpha_{i_0} = 0 \text{ である。}$$

なぜなら、もし $\alpha_{i_0} \neq 0$ なら

$$x + \alpha_{i_0}^{-1} \cdot \sum \alpha_i x_i = 0 \text{ となり (1)と矛盾する。}$$

$\sum \alpha_i x_i = 0$ より　$\alpha_i = 0$. $(\forall i \in I)$

故に線型独立系である。

これは、B_0が極大系であることに矛盾する。
すなわち B_0はMを張る基底である。

定理　Cをchain complex，Z cycleのつくるsubchain complex　Cのホモロジー群Hを$\partial=0$としてchain complexとみます。　i　$Z\subset C \hookrightarrow C$は包含写像
η　$Z\to H$はprojectionで　η'　$H\to Z$を$\eta\circ\eta'=id$を満たすものとする。
この時　$1\otimes i^{(2)}$　$1\otimes\eta'^{(2)}$から定まる次の準同型は同型。

$$H_*(W\otimes_{R\pi}H^{(2)}) \xrightarrow{1\otimes\eta'^{(2)}_*} H_*(W\otimes_{R\pi}Z^{(2)}) \xrightarrow{1\otimes i^{(2)}_*} H_*(W\otimes_{R\pi}C^{(2)})$$

証明　$0\longrightarrow Z_n \xrightarrow{i} C_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1}\longrightarrow 0$　は体故
分裂する完全系列である。
故　$C_n \cong Z_n\oplus B_{n-1}$
$Z_n \xrightarrow{i} C_n \xrightarrow{p} Z_n$　　$p\circ i=id$とするpが存在する。

$$Z_n \xrightarrow{i} C_n \xrightarrow{p} Z_n \xrightarrow{\eta} H_n$$

$\xi'=\eta\circ p$　$C_n\longrightarrow H_n$　は
$\eta\circ p\circ i=\eta$を満たす。
$\xi=i\circ\eta'$とおく
$\xi:$　$H\xrightarrow{\eta'} Z \xrightarrow{i} C$
$\xi'\circ\xi=\eta\circ p\circ i\circ\eta'=\eta\circ\eta'=id$.

$\xi'_*\circ\xi_*=id$　$H_n\longrightarrow H_n$.
$\xi_*=id$　$H\longrightarrow H_*(C)$
故にξはチェインホモトピー同値写像である。
従って補題より
ξ_*　$H_*(W\otimes_{R\pi}H^{(2)})\cong H_*(W\otimes_{R\pi}C^{(2)})$
$\xi'_*=\xi_*^{-1}$　$H_*(W\otimes_{R\pi}C^{(2)})\xrightarrow{\cong} H_*(W\otimes_{R\pi}H^{(2)})$
$\xi'_*\circ i_*=\eta_*$　　$\eta_*\circ\eta'_*=id$.
故に　$\xi_*=i_*\eta'_*=i_*\circ\eta_*^{-1}$

以上より定理が示せた。

定理19.4の(ii)

定理　Cをcochain complex　Cのcocycleの作るsub-cochain complex Zとする。
Cのcohomology群Hをδ=0のcochain complexとみなす。と(i)と同様に

$$H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, H^{(2)})) \xleftarrow{\eta_*} H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, Z^{(2)})) \xrightarrow{\xi_*} H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, C^{(2)}))$$

を考える時　$\xi_* \circ \eta_*^{-1}$ は同型である。

$0 \longrightarrow Z_n \xrightarrow{i} C_n \xrightarrow{\delta} B_{n+1} \longrightarrow 0$ は体故、分裂する完全系列である。

故に $C_n \cong Z_n \oplus B_{n+1}$

$Z_n \xrightarrow{i} C_n \xrightarrow{p} Z_n$　　$p \circ i = id$ となる p が存在する。

$Z_n \xrightarrow{i} C_n \xrightarrow{p} Z_n \xrightarrow{\eta} H_n$.

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\delta} & C_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n & \xrightarrow{\delta} & H_n \end{array}$$

δc_n

$\xi' = \eta \circ p$　$C_n \longrightarrow H_n$ は

$\eta \circ p \circ i = \eta$ を満たす。

$\xi = i \circ \eta'$　$H_n \xrightarrow{\eta'} Z_n \longrightarrow C_n$

$\xi' \circ \xi = \eta \circ p \circ i \circ \eta' = \eta \circ \eta' = id$. 故

$\xi'_* \circ \xi_* = id$　$H_n \longrightarrow H_n$

また $\xi_* = id$　$H \longrightarrow H_*(C)$ であるから。

故に ξ はチェインホモトピー同値写像である。

従って補題より

$\xi'_* \circ \xi_*$　$H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, H_n^{(2)})) \xrightarrow{\xi_*} H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, C_n^{(2)})) \xrightarrow{\xi'_*} H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, H_n^{(2)}))$

$\xi'_* \circ \xi_* = id$　$\xi_* \circ \xi'_* = id$.

$\xi'_* = \xi_*^{-1}$　$H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, C_n^{(2)})) \longrightarrow H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, H_n^{(2)}))$

$\xi'_* \circ i_* = \eta_*$　　$\eta_* \eta'_* = id$

故に　$\xi_* = i_* \circ \eta'_* = i_* \circ \eta_*^{-1}$

$$H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, H^{(2)})) \xleftarrow{\eta_*} H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, Z^{(2)})) \xrightarrow{i_*} H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, C^{(2)}))$$

No.

Date

定理 K $H_*(S^\infty \times_\pi X^2) \xrightarrow{\cong} H_*(W \otimes_{R\pi} H_*(X)^{(2)})$ なる naturality を持つ同型が存在する。

$\pi \quad S^\infty \times X^2 \longrightarrow S^\infty \times_\pi X^2 \quad$ projection

$\nabla : S(S^\infty \times_\pi X^2) \longrightarrow W \otimes_{R\pi} S(X)^{(2)}$

$\nabla_0 : S_0(S^\infty \times_\pi X^2) \longrightarrow W_0 \otimes_{R\pi} S_0(X)^{(2)}$

$\nabla_0(z\, x, y) \longmapsto w_0 \otimes_{R\pi} x \otimes y. \quad (z \in e^+)$

$\nabla_0(T(z, x, y)) \qquad Tz \in e^-$ 故

$\qquad \parallel$

$\nabla_0(Tz, y, x) \longmapsto Tw_0 \otimes_{R\pi} y \otimes x = Tw_0 \otimes_{R\pi} T(x \otimes y) = w_0 \otimes_{R\pi} x \otimes y$

故に $\nabla ; S_0(S^\infty \times_\pi X^2) \longrightarrow W \otimes_{R\pi} S(X)^{(2)}$ が定義できる。

この時 次の (i) (ii) が成り立つ。

(i) $\partial \circ \nabla_0 = \nabla_{-1} \circ \partial$

(ii) $\nabla_0 \times (id \times f \times g)_\# = (id \otimes f \otimes g)_\# \circ \nabla_0$

さて帰納法により 各 $r < n$ に対し 準同型 $\nabla_r \; S_r(S^\infty \times X \times Y) \longrightarrow (W \otimes S(X) \otimes S(Y))_r$ が定義され、上の条件 (i), (ii) が成り立つと仮定する。いま $\lambda \in S_n(S^\infty)$ に対し 特異n単体 $\rho_\lambda \; \Delta^n \longrightarrow S^\infty \times \Delta^n \times \Delta^n$ を $\rho_\lambda(v) = (\lambda(v), v, v) \quad (v \in \Delta^n)$ で定義する。

この時、$\nabla_{n-1} \partial_n(\rho_\lambda) = \partial_n \nabla_n(\rho_\lambda)$ なる $\nabla_n(\rho_\lambda) \in (W \otimes S(\Delta^n) \otimes S(\Delta^n))_n$ が存在する。

$\because \; \partial_{n-1} \nabla_{n-1} \partial_n(\rho_\lambda) = \nabla_{n-2} \partial_{n-1} \partial_n(\rho_\lambda) = 0$ で $H_{n-1}(W \otimes S(\Delta^n) \otimes S(\Delta^n)) = 0 \quad (n > 1)$

$n = 1$ の時は、

$\rho_\lambda \; \Delta^1 \longrightarrow S^\infty \times \Delta^1 \times \Delta^1 \qquad \rho_\lambda(v) = (\lambda(v), v, v)$

$[\nabla_0 \partial_1(\rho_\lambda)] = [\nabla_0(\lambda(\varepsilon^0), \varepsilon^0, \varepsilon^0) - \nabla_0(\lambda(\varepsilon^1), \varepsilon^1, \varepsilon^1)]$

$= [\psi(\lambda(\varepsilon^0)) \otimes \varepsilon^0 \otimes \varepsilon^0 - \psi(\lambda(\varepsilon^1)) \otimes \varepsilon^1 \otimes \varepsilon^1]$

$= [\psi(\lambda(\varepsilon^1)) \otimes \varepsilon^0 \otimes \varepsilon^0 - \psi(\lambda(\varepsilon^1)) \otimes \varepsilon^1 \otimes \varepsilon^1] \qquad (w_0 \simeq Tw_0$ より$)$

$H_0(W \otimes S(\Delta^1) \otimes S(\Delta^1))$ の中で $= 0 \qquad (\varepsilon^0 \simeq \varepsilon^1$ より$)$

ところで $S^\infty \times X \times Y$ の各特異は (λ, σ, τ) の形に一意的に表わせる

ここに λ, σ, τ はそれぞれ S^∞, X, Y の特異n単体。従って準同型

$\nabla_n : S_n(S^\infty \times X \times Y) \longrightarrow (W \otimes S(X) \otimes S(Y))_n$ を

$\nabla_n(\lambda, \sigma, \tau) = (id \otimes \sigma_\# \otimes \tau_\#) \nabla_n(\rho_\lambda)$ で定義する。

定理.

$\exists \kappa \quad H_*(S^\infty \times_\pi X^2) \cong H_*(W \otimes_{R\pi} H_*(X)^{(2)})$ なる naturality を持つ同型が存在する.

証明. $\pi \quad S^\infty \times X^2 \longrightarrow S^\infty \times_\pi X^2$ projection

$$\begin{tikzcd}
S(S^\infty \times X^2) \arrow[r, "\pi_\#"] \arrow[d, shift right, "\nabla_\#"'] & S(S^\infty \times_\pi X^2) \arrow[ddl, "\kappa_\#"] \\
W \otimes S(X)^{(2)} \arrow[u, shift right, "\nabla'_\#"'] \arrow[d] & \\
W \otimes_{R\pi} S(X)^{(2)} &
\end{tikzcd}$$

$\kappa_\#$ chain map.

ここで $\nabla'_\#$, $\nabla_\#$ は naturality を持つ チェインホモトピー同値写像

$\kappa_\#$ は well-defined である.

実際. $\sigma : \Delta_n \longrightarrow S^\infty \times X^2$

$T\sigma ; \Delta_n \longrightarrow S^\infty \times X^2$ が $S(S^\infty \times_\pi X^2)$ では同一視されるが,

$\nabla_\#(\sigma)$ と $\nabla_\#(T\sigma) = T_\# \nabla_\#(\sigma)$ が $W \otimes_{R\pi} S(X)^{(2)}$ では同一視される

$$(W \otimes S(X)^{(2)})_n \xrightarrow{\Phi} (W \otimes S(X)^{(2)})_{n+1}$$

$W_0 \otimes S(X)^{(2)}$

$$S(S^\infty \times_\pi X^2) \longrightarrow W \otimes_{R\pi} S(X)^{(2)}$$

定理　κ　$H_*(S^\infty \times_\pi X^2) \cong H_*(W \otimes_{R\pi} H_*(X)^{(2)})$ なる naturality を持つ同型が存在する。

証明　$\nabla : S(S^\infty \times X^2) \longrightarrow W \otimes S(X)^{(2)}$
$\nabla' : W \otimes S(X)^{(2)} \longrightarrow S(S^\infty \times X^2)$
$\nabla \circ \nabla'$　$\nabla' \circ \nabla$ は id にチェインホモトピーである

$$\begin{tikzcd} S(S^\infty \times X^2) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\pi_\#"] \arrow[dr] & W \otimes S(X)^{(2)} \arrow[d, "\omega"] \\ S(S^\infty \times_\pi X^2) \arrow[r, "\kappa"] & W \otimes_{R\pi} S(X)^{(2)} \end{tikzcd}$$

κ を誘導する。実際、$\pi_\#$ は $\Delta_q \longrightarrow \lambda \times \sigma \times \tau$ と $\Delta_q \rightarrow T\lambda \times \tau \times \sigma$ を同一視した加群であるが、

$$\omega \circ \nabla(\Delta_q \longrightarrow \lambda \times \sigma \times \tau) = \omega \circ T\nabla(\Delta_q \rightarrow \lambda \times \sigma \times \tau)$$
$$= \omega \circ \nabla(\Delta_q \rightarrow T\lambda \times \tau \times \sigma)$$

同じ行き先を持つ故 κ が定義できる。

また、

$$\begin{tikzcd} W \otimes S(X)^{(2)} \arrow[r, "\nabla'"] \arrow[d, "\omega"] & S(S^\infty \times X^2) \arrow[d, "\pi_\#"] \\ W \otimes_{R\pi} S(X)^{(2)} \arrow[r, "\kappa'"] & S(S^\infty \times_\pi X^2) \end{tikzcd}$$

は κ' を誘導する。実際 ω は $w \otimes \sigma \otimes \tau$ と $Tw \otimes \tau \otimes \sigma \times (-1)^{|\sigma||\tau|}$ を同一視した加群であるが

$$\pi_\# \circ \nabla'(w \otimes \sigma \otimes \tau) = \pi_\# T\nabla'(w \otimes \sigma \otimes \tau)$$
$$= \pi_\# \nabla'(Tw \otimes \tau \otimes \sigma \times (-1)^{|\sigma||\tau|})$$

であり同じ行き先を持つ故 κ' が定義できる。

同様に Φ' $W \otimes S(X)^{(2)} \longrightarrow W \otimes S(X)^{(2)}$ に対して
ψ' $W \otimes_{R\pi} S(X)^{(2)} \longrightarrow W \otimes_{R\pi} S(X)^{(2)}$ を誘導し
Φ $S(S^\infty \times X \times X) \longrightarrow S(S^\infty \times X \times X)$ に対して
ψ $S(S^\infty \times_\pi X^2) \longrightarrow S(S^\infty \times_\pi X^2)$ を誘導する。

$\nabla'\circ\nabla \quad S(S^\infty\times X^2) \longrightarrow S(S^\infty\times X^2)$ に対して

$\nabla'_r\circ\nabla_r - id = \Phi_{r-1}\circ\partial_r + \partial_{r+1}\circ\Phi_r$ であるから

また $\pi_\#\Phi_{r-1} = \Psi'_{r-1}\circ\pi_\#$

$\pi_\#\nabla'_r\circ\nabla_r = K'\circ i\,\nabla_r = K'\circ K\circ\pi_\#$ より

$K'\circ K\circ\pi_\# - \pi_\#\circ id = \Psi'_{r-1}\circ\pi_\#\partial_r + \pi_\#\partial_{r+1}\circ\Phi_r$

$K'\circ K\circ\pi_\# - \pi_\# = \Psi'_{r-1}\circ\partial_r\circ\pi_\# + \partial_{r+1}\circ\pi_\#\Phi_r$

$K'\circ K\circ\pi_\# - \pi_\# = \Psi'_{r-1}\circ\partial_r\circ\pi_\# + \partial_{r+1}\circ\Psi'_r\circ\pi_\#$

$\pi_\#$ は全射ゆえ

$K'\circ K - id = \Psi'_{r-1}\circ\partial_r + \partial_{r+1}\circ\Psi'_r$ が成り立つ

同様に

$\nabla\circ\nabla' \quad W\otimes S(X)^{(2)} \longrightarrow W\otimes S(X)^{(2)}$

$\nabla\circ\nabla' - id = \Phi'_{r-1}\circ\partial_r + \partial_{r+1}\circ\Phi'_r$

また $i\circ\Phi' = \Psi'\circ i$

$i\,\nabla\circ\nabla' = K\pi_\#\nabla' = K\circ K'\circ i$ より

$K\circ K'\circ i - i = i\,\Phi'_{r-1}\circ\partial_r + i\,\partial_{r+1}\circ\Phi'_r$

$K\circ K'\circ i - i = \Psi'_{r-1}\circ i\circ\partial_r + i\circ\partial_{r+1}\circ\Phi'_r$ ——— (1)

$$\begin{tikzcd}
(W\otimes S(X)^{(2)})_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (W\otimes S(X)^{(2)})_{n-1} \arrow[d] \\
(W\otimes_{R\pi} S(X)^{(2)})_n \arrow[r, "\partial"] & (W\otimes_{R\pi} S(X)^{(2)})_{n-1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
i\,\partial(w\otimes\sigma_1\otimes\sigma_2) &= i(\partial(w)\otimes\sigma_1\otimes\sigma_2) + (-1)^{|w|}\,i(w\otimes\partial(\sigma_1\otimes\sigma_2)) \\
&= \partial(w)\otimes_{R\pi}\sigma_1\otimes\sigma_2 + (-1)^{|w|}\,w\otimes_{R\pi}\partial(\sigma_1\otimes\sigma_2) \\
&= \partial(w\otimes_{R\pi}\sigma_1\otimes\sigma_2) \\
&= \partial\circ i(w\otimes\sigma_1\otimes\sigma_2)
\end{aligned}$$

(1)は $K\circ K'\circ i - i = \Psi'_{r-1}\circ\partial_r\circ i + \partial_{r+1}\circ i\circ\Phi'_r$

$K\circ K'\circ i - i = \Psi'_{r-1}\,\partial_r\circ i + \partial_{r+1}\circ\Psi'_r\circ i$

i 全射故

$K\circ K' - id = \Psi'_{r-1}\,\partial_r + \partial_{r+1}\circ\Psi'_r$

以上より $\kappa\circ\kappa'$, $\kappa'\circ\kappa$ は id にチェインホモトピー同値写像である。

∇

$$\begin{tikzcd} S(S^\infty\times X^2) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "id\times f\times f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W\otimes S(X)^{(2)} \arrow[d, "id\otimes f_\#\otimes f_\#"] \\ S(S^\infty\times Y^2) \arrow[r, "\nabla"] & W\otimes S(Y)^{(2)} \end{tikzcd}$$

より

$$\begin{tikzcd} S(S^\infty\times_\pi X^2) \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "id\times f^{(2)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W\otimes_{R\pi} S(X)^{(2)} \arrow[d, "id\otimes_{R\pi} f_\#^{(2)}"] \\ S(S^\infty\times_\pi Y^2) \arrow[r, "\kappa"] & W\otimes_{R\pi} S(Y)^{(2)} \end{tikzcd}$$

が成り立つ

実際、

$$i\circ\nabla\circ id\times f^{(2)} = i\circ(id\otimes f_\#\otimes f_\#)\circ\nabla$$

$$\kappa\circ\pi_\#\circ id\times f^{(2)} = id\otimes_{R\pi} f_\#^{(2)}\circ i\circ\nabla$$

$$\kappa\circ id\times f^{(2)}\circ\pi_\# = id\otimes_{R\pi} f_\#^{(2)}\circ\kappa\circ\pi_\#$$

$\pi_\#$ 全射より

$$\kappa\circ id\times f^{(2)} = id\otimes_{R\pi} f_\#^{(2)}\circ\kappa \text{ が成り立ち}$$

naturality を持つ。

また

$$\begin{tikzcd} W\otimes S(X)^{(2)} \arrow[r, "\nabla'"] \arrow[d, "id\otimes f_\#^{(2)}"'] & S(S^\infty\times X^2) \arrow[d, "id\times f\times f"] \\ W\otimes_{R\pi} S(Y)^{(2)} \arrow[r, "\nabla'"] & S(S^\infty\times Y^2) \end{tikzcd}$$

より

$$\begin{tikzcd} W\otimes_{R\pi} S(X)^{(2)} \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[d, "id\otimes_{R\pi} f_\#^{(2)}"'] & S(S^\infty\times_\pi X^2) \arrow[d, "id\times f^2"] \\ W\otimes_{R\pi} S(Y)^{(2)} \arrow[r, "\kappa'"] & S(S^\infty\times_\pi Y^2) \end{tikzcd}$$

が成り立つ

実際、

$$\pi\circ id\times f\times f\times\nabla' = \pi\circ\nabla'\circ id\otimes f_\#^{(2)}$$

$$id\times f\times f\circ\pi\times\nabla' = \kappa'\circ i\circ id\otimes f_\#^{(2)}$$

$$(id\times f\times f)\circ\kappa'\circ i = \kappa'\circ(id\otimes_{R\pi} f_\#^{(2)})\circ i$$

i 全射故

$$id\times f\times f\circ\kappa' = \kappa'\circ id\otimes_{R\pi} f_\#^{(2)} \text{ が成り立ち}$$

naturality を持つ

$$L^{\#} \quad \mathrm{Hom}_{R\pi}(\varpi_p, \mathrm{Hom}(S(X)_q, R) \otimes \mathrm{Hom}(S(X)_r, R)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\pi}(\varpi, \mathrm{Hom}(S(X)^{(2)}, R))$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ f & \longmapsto & g \end{array}$$

$$g(\omega)(c_1 \otimes c_2) = f(\omega)(c_1)(c_2)$$

1) $R\pi$の証明.

$u \in \mathrm{Hom}(S(X)^{(2)}, R)$ に対して.

$Tu(c_1 \otimes c_2) = u(T(c_1 \otimes c_2))$ と定義する.

$$\begin{aligned} T^2u(c_1 \otimes c_2) &= u(T^2(c_1 \otimes c_2)) \\ &= u(c_1 \otimes c_2) \end{aligned}$$

$T^2 = id$

$f \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\varpi, \mathrm{Hom}(S(X), R)^{(2)})$ に対し

$f(\omega) = \Sigma [f_i] \otimes [g_i]$ $\quad f_i \in \mathrm{Hom}(S(X)_p, R)$

$g_i \in \mathrm{Hom}(S(X)_q, R)$ とする.

$$\begin{aligned} &L^{\#}(f)(\omega)(c_1 \otimes c_2) \\ &\quad = f(\omega)(c_1)(c_2) \\ &\quad = \Sigma f_i(c_1) \otimes g_i(c_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &L^{\#}(f)(T\omega)(c_1 \otimes c_2) \\ &\quad = \Sigma (-1)^{|f_i||g_i|} g_i(c_1) \otimes f_i(c_2) \\ &\quad = \Sigma (-1)^{|f_i||g_i|} f_i(c_2) \cdot g_i(c_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T \cdot L^{\#}(f))(\omega)(c_1 \otimes c_2) &= (L^{\#}(f))(\omega)(T(c_1 \otimes c_2)) \\ &= \Sigma (-1)^{|c_1||c_2|} f_i(c_2) \cdot g_i(c_1) \\ &= \Sigma (-1)^{|f_i||g_i|} f_i(c_2) \cdot g_i(c_1) \\ &= L^{\#}(f)(T\omega)(c_1 \otimes c_2) \end{aligned}$$

故に $R\pi$ を保つ.

$$L^{\#} \quad \mathrm{Hom}_{R\Pi}(\varpi, \mathrm{Hom}(S(X), R)^{(2)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\Pi}(\varpi, \mathrm{Hom}(S(X)^{(2)}, R))$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ f & \longmapsto & g(\omega)(c_1 \otimes c_2) = f(\omega)(c_1)(c_2) \end{array}$$

RΠの証明.

$$f(\omega) = \Sigma f_i \otimes g_i \qquad f_i \in \mathrm{Hom}(S(X)_r, R)$$
$$\qquad\qquad\qquad g_i \in \mathrm{Hom}(S(X)_q, R)$$

$$f(T\omega) = \Sigma(-1)^{|f_i||g_i|} g_i(\ ) \otimes f_i(\ )$$
$$f(T\omega)(c_1 \otimes c_2) = \Sigma(-1)^{|f_i||g_i|} g_i(c_1) \otimes f_i(c_2)$$
$$= \Sigma(-1)^{|f_i||g_i|} g_i(c_1) f_i(c_2)$$

この時,

$$L^{\#}(f)(\omega)(c_1 \otimes c_2) = \Sigma f_i(c_1) \otimes g_i(c_2)$$
$$L^{\#}(f)(T\omega)(c_1 \otimes c_2) = \Sigma f(T\omega)(c_1 \otimes c_2)$$
$$= \Sigma(-1)^{|f_i||g_i|} g_i(c_1) \cdot f_i(c_2)$$
$$(T L^{\#}(f))(\omega)(c_1 \otimes c_2) = g(\omega)(T(c_1 \otimes c_2))$$
$$= (-1)^{|c_1||c_2|} g(\omega)(c_2 \otimes c_1)$$
$$= (-1)^{|c_1||c_2|} \Sigma f_i(c_2) \otimes g_i(c_1)$$
$$= \Sigma(-1)^{|c_1||c_2|} g_i(c_1) \cdot f_i(c_2)$$
$$= L^{\#}(f)(T\omega)(c_1 \otimes c_2)$$

故 このL#はwell-definedである.

著者　泉　宏明

住所　〒739-0145　　広島県東広島市八本松町宗吉 92-5

HomePage

http://www7a.biglobe.ne.jp/~popuri_art/izumi/