$[h'] \in H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}\otimes S(X)^{(2)}, R))$ とし
$[v] \in H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, Z^*(X)^{(2)}))$
$[c] \in H_*(\overline{W}\otimes_{R\pi} Z(X)^{(2)})$ とする.

$$\langle \tau^{\#-1}\nabla^{\#}(h'),\ \tau_{\#}^{-1}\nabla^{\#}u_{\#}(v)\frown \tau_{\#}\nabla'_{\#}(c)\rangle$$
$$=\langle \nabla^{\#}(h'),\ \nabla^{\#}u_{\#}(v)\frown \nabla'_{\#}(c)\rangle$$
$$=\langle \nabla^{\#}(h')\smile \nabla^{\#}u_{\#}(v),\ \nabla'_{\#}(c)\rangle$$
$$=\langle \nabla^{\#}(h')\otimes \nabla^{\#}u_{\#}(v),\ D\circ\nabla'_{\#}(c)\rangle$$
$$=\langle h'\otimes u_{\#}(v),\ \nabla_{\#}^{(2)}\circ D\circ\nabla'_{\#}(c)\rangle$$

$\nabla_{\#}^{(2)}\circ D$ と $S\circ\lambda\otimes D^{(2)}\circ\nabla_{\#}$ が $R\pi$ chain map であることにより

$$\simeq\langle h'\otimes u_{\#}(v),\ S\circ\lambda\otimes D^{(2)}\circ\nabla_{\#}\circ\nabla'_{\#}(c)\rangle$$

$\nabla_{\#}\circ\nabla'_{\#}\simeq id$ $R\pi$ chain homotop であることにより,

$$\simeq\langle h'\otimes u_{\#}(v),\ S\circ\lambda\otimes D^{(2)}(c)\rangle$$

$c = w\otimes a_1\otimes a_2$ とおく
また $\lambda(w)=\sum_i c_i\otimes c_i'$ とする.

$$S\circ\lambda\otimes D^{(2)}(c) = S\circ\lambda(w)\otimes D(a_1)\otimes D(a_2)$$
$$=\sum_{\substack{i\\ p+q=|a_1|\\ p'+q'=|a_2|}} S(c_i\otimes c_i'\otimes\sigma_p\otimes\sigma_q\otimes\sigma_{p'}'\otimes\sigma_{q'}')$$

ここで $D(a_1)=\sum_{p+q=|a_1|}\sigma_p\otimes\sigma_q$ $D(a_2)=\sum_{p'+q'=|a_2|}\sigma_{p'}'\otimes\sigma_{q'}'$ とした。

$$=\sum_{\substack{i\\ p+q=|a_1|\\ p'+q'=|a_2|}}(-1)^{|c_i'|(|\sigma_p|+|\sigma_{p'}'|)+|\sigma_q||\sigma_{p'}'|}\,c_i\otimes\sigma_p\otimes\sigma_{p'}'\otimes c_i'\otimes\sigma_q\otimes\sigma_{q'}'$$

よって

$$\langle h'\otimes u_{\#}(v),\ S\circ\lambda\otimes D^{(2)}(w\otimes a_1\otimes a_2)\rangle$$
$$=\sum_{\substack{i,j\\ p+q=|a_1|\\ p'+q'=|a_2|}}(-1)^{|c_i'|(|\sigma_p|+|\sigma_{p'}'|)+|\sigma_q||\sigma_{p'}'|}\langle h',\ c_i\otimes\sigma_p\otimes\sigma_{p'}'\rangle\,\alpha_j^{i}(\sigma_q)\,\alpha_j'^{i}(\sigma_{q'}')$$

ここで $v(c_i')=\sum_j\alpha_j^{i}\otimes\alpha_j'^{i}$ とした.

$$=\sum_{\substack{i,j\\ p+q=|a_1|\\ p'+q'=|a_2|}}(-1)^{|c_i'|(|\sigma_p|+|\sigma_{p'}'|)+|\sigma_q||\sigma_{p'}'|}\langle h',\ c_i\otimes\alpha_j^{i}\frown a_1\otimes\alpha_j'^{i}\frown a_2\rangle$$
$$=\langle h',\ \sum_{\substack{i,j\\ p+q=|a_1|\ \ p'+q'=|a_2|}}c_i\otimes(-1)^{|c_i'|(|\sigma_p|+|\sigma_{p'}'|)+|\sigma_q||\sigma_{p'}'|+|\alpha_j'^{i}|(|a_2|-|\alpha_j'^{i}|)}\frown(\alpha_j^{i}\otimes\alpha_j'^{i}\otimes a_1\otimes a_2)\rangle$$
$$=\langle h',\ \sum_{\substack{i,j\\ p+q=|a_1|\\ p'+q'=|a_2|}}c_i\otimes(-1)^{|c_i'|(|\sigma_p|+|\sigma_{p'}'|)+|\sigma_q||\sigma_{p'}'|+|\sigma_q|(p'+q'-|\sigma_{q'}'|)}\frown(\alpha_j^{i}\otimes\alpha_j'^{i}\otimes a_1\otimes a_2)\rangle$$

$$= \langle h', \sum_{\substack{i\ j \\ p+q=|a_1| \\ p'+q'=|a_2|}} c_i \otimes (-1)^{|c_i|(p+p')} \sqcup (\alpha_j{}^i \otimes \alpha_j'{}^i \otimes a_1 \otimes a_2) \rangle$$

$$= \langle h', \sum_i (-1)^{|c_i|(p+p')} c_i \otimes \sqcup (\upsilon(c_i') \otimes a_1 \otimes a_2) \rangle$$

$$\begin{aligned} p+p' &= |a_1|+|a_2| - q - q' \\ &= |a_1| + |a_2| - (q+q') \\ &= |a_1|+|a_2| - |\upsilon(c_i')| \end{aligned} \qquad |\alpha_j{}^i| = |6q| \quad |\alpha_j'{}^i| = |6q'| \text{ より}$$

$$= \langle h', \sum_i \upsilon \frown c_i \rangle$$

$$= \langle h', \upsilon \frown c \rangle$$

$$= \langle \pi^{\#-1} \nabla^{\#}(h), \pi_{\#} \nabla'_{\#} (\upsilon \frown c) \rangle.$$

Rは体故 クロネッカー積により. $\pi_{\#}^{-1} \nabla^{\#} \mu_{\#}(\upsilon) \frown \pi_{\#} \nabla'_{\#}(c)$ と $\pi_{\#} \nabla'_{\#}(\upsilon \frown c)$ は同じ homology 類を表わす.

よって cap product が保たれる.

q.e.d.

著者　泉　宏明

住所　〒739-0145　　広島県東広島市八本松町宗吉 92-5

HomePage

http://www7a.biglobe.ne.jp/~popuri_art/izumi/