No 1.

$(S^{\infty}\times_{\pi}X^{2})_{*}(S^{\infty}\times_{\pi}X^{2})$ の構造と Sq^{*} の定義.

～ $H_{*}\otimes_{\pi}H_{*}(X)^{(2)}$ と $H^{*}(\mathrm{Hom}_{\pi}(\overline{W}, H^{*}(X)^{(2)}))$ におけ

る cup product cap product の確定と証明を中心と

して ～

京大理学部 泉 宏明.

参考文献

1) 不動点定理とその周辺 中岡 稔

2) 位相幾何学 ホモロジー論 中岡 稔

3) Cohomology operations N. E. Steenrod & D.B.A Epstein

4) Lectures on Algebraic Topology Albrecht Dold

1982年 2月20日～2月24日にまとめる.

尺 係. $\pi = \mathbb{Z}_2$. $R\pi$. π の R 上の group ring.

係数群はすべて R. $\otimes$ は $\otimes_R$. $\otimes_{\pi}$ は $\otimes_{R\pi}$ Hom は

Hom_R, Hom_{π} は $\mathrm{Hom}_{R\pi}$ を略すことにする.

Def 1 $\overline{W}$ 自由 $R\pi$ chain complex を次のように定義する.

i) $q<0 \Rightarrow \overline{W}_q = 0$

$q \geq 0 \Rightarrow \overline{W}_q$ は 唯一つの元 ω_q で

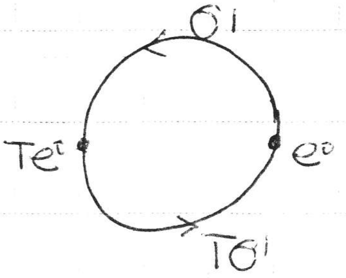
生成される自由 $R\pi$ module.

ii) $\partial_q(\omega_q) = (T+(-1)^{q})\omega_{q-1}$ ここで T は

Πの生成元

このmodelはS^∞のantipodal mapに対応した、regularなC W分割によるchain complexである。

$S^1 \subset S^\infty$



$$H_q(W)=0 \quad q \neq 0 \qquad H_0(W) \cong R.$$

S^∞はantipodal map、X^2はswitching mapによりΠ spaceとなる。$S^\infty \times X^2$を対角作用によりΠ spaceとみなす。この作用はproperであるから$S(S^\infty \times X^2)$はこの作用によってfree RΠ chain complexとみなせる。

Wはfree RΠ chain complexで$S(X)^{(2)} = (S(X) \otimes_R S(X))$はswitching chain mapによりRΠ chain complexとなり、故に、対角作用により$W \otimes S(X)^{(2)}$はfree RΠ chain complexとなる。

$S^\infty \times_\pi X^2$は$S^\infty \times X^2 /$ antipodal map × switching mapとする。

Acyclic modelの方法により次の定理が証明される。（証明は不動点定理とその周辺を見よ）

Theorem 1. 各位相空間 X に対し $R\Pi$ chain homotopy equivalence

$$\nabla_\# \quad S(S^\infty \times X^2) \longrightarrow W \otimes S(X)^{(2)}$$

$$\nabla'_\# \quad W \otimes S(X)^{(2)} \longrightarrow S(S^\infty \times X^2)$$

$\nabla_\# \circ \nabla'_\# \simeq id$ $\nabla'_\# \circ \nabla_\# \simeq id$ が定義でき, $\nabla_\#$ $\nabla'_\#$ 及び $\nabla_\# \circ \nabla'_\# \simeq id$ $\nabla'_\# \circ \nabla_\# \simeq id$ を与える chain homotopy

$$\Phi \quad S(S^\infty \times X^2) \longrightarrow S(S^\infty \times X^2)$$

$$\Phi' \quad W \otimes S(X)^{(2)} \longrightarrow W \otimes S(X)^{(2)}$$ として

連続写像に関して natural かつ次の T に関して可換であるものがとれる.

ここで $T \quad S^\infty \times X^2 \longrightarrow S^\infty \times X^2$ は $T(z, x, y) = (T(z), y, x)$ $z \in S^\infty$ $x \in X$ $y \in X$.

$T \quad W \otimes S(X)^{(2)} \longrightarrow W \otimes S(X)^{(2)}$ は $T(\omega \otimes c \otimes d) = (-1)^{|c||d|} T\omega \otimes d \otimes c$ $\omega \in W$ $c, d \in S(X)$

例

$$\begin{CD}
S(S^\infty \times X^2) @>{\nabla_\#}>> W \otimes S(X)^{(2)} \\
@V{(id \times f^{(2)})_\#}VV @VV{id \otimes f^{(2)}_\#}V \\
S(S^\infty \times Y^2) @>{\nabla_\#}>> W \otimes S(Y)^{(2)}
\end{CD}$$

$f \quad X \longrightarrow Y$ cont.

$$\begin{CD}
S(S^\infty \times X^2) @>{\nabla_\#}>> W \otimes S(X)^{(2)} \\
@V{T_\#}VV @VV{T}V \\
S(S^\infty \times X^2) @>>> W \otimes S(X)^{(2)}
\end{CD}$$

Def 2 $R\pi$ chain complex C $R\pi$ chain complex C' に対し、$R\pi$ cochain complex $\mathrm{Hom}_{R\pi}(C, C')$ が次で定義される。

i) $(\mathrm{Hom}_{R\pi}(C, C'))^n = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}_{R\pi}(C_p, C'^q)$

ii) $x \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(C_p, C'^q)$ に対し $x \circ \partial \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(C_{p+1}, C'^q)$ $\delta \circ x \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(C_p, C'^{q+1})$ を考慮し δ $(\mathrm{Hom}_{R\pi}(C, C'))^n \longrightarrow (\mathrm{Hom}_{R\pi}(C, C'))^{n+1}$

$\delta(x) = x \circ \partial + (-1)^p \delta \circ x$ で定義する

Lemma 1

i) chain map φ_0, φ_1 $C \longrightarrow C'$ が chain homotop

$\Rightarrow$ $\varphi_{0*} = \varphi_{1*}$ $H_*(\overline{W} \otimes_\pi C^{(2)}) \longrightarrow H_*(\overline{W} \otimes_\pi C'^{(2)})$

$\varphi_{i*} = id \otimes_\pi \varphi_{i*}^{\frown}$

ii) cochain map φ_0, φ_1 $C \longrightarrow C'$ が cochain homotop

$\Rightarrow$ $\varphi_{0*} = \varphi_{1*}$ $H^*(\mathrm{Hom}_\pi(\overline{W}, C^{(2)})) \longrightarrow H^*(\mathrm{Hom}_\pi(\overline{W}\ C'^{(2)}))$

iii) i) の仮定のもとに

$\varphi_0^* = \varphi_1^*$ $H^*(\mathrm{Hom}_\pi(\overline{W}, \mathrm{Hom}(C'^{(2)}, R))) \longrightarrow$

$H^*(\mathrm{Hom}_\pi(\overline{W}, \mathrm{Hom}(C^{(2)}, R)))$

proof.

i) chain complex I を次で定義する.

a) I_0 は2元 e_0, e_0' で生成される自由 R 加群。

I_1 は唯1つの元 e_1 で生成される自由 R 加群。$I_q = 0$ $(q \neq 0, 1)$

b) $\partial(e_1) = e_0' - e_0$

C から C' への chain homotopy は $I \otimes C$ から C' への chain map と自然に対応する. その対応は次のものである. φ_0 から φ_1 への chain homotopy Φ,

$C \longrightarrow C'$ に対し $\hat{\Phi}$ $I \otimes C \longrightarrow C'$ を $\hat{\Phi}(e_0 \otimes c) = \varphi_0(c)$, $\hat{\Phi}(e_0' \otimes c) = \varphi_1(c)$ $\hat{\Phi}(e_1 \otimes c) = \Phi(c)$ により定義する. well defined.

I を trivial な作用で, $I^{(2)} = I \otimes I$ を交換 chain map により, $R\Pi$ chain complex とみなす $R\Pi$ chain map. θ $I \otimes W \longrightarrow I^{(2)} \otimes W$ で $\theta(e_0 \otimes \omega) = e_0 \otimes e_0 \otimes \omega$ $\theta(e_0' \otimes e_0' \otimes \omega)$ を満たすものが存在することが示される.

$$\begin{tikzcd}
e_1 \otimes \omega_0 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & e_0' \otimes \omega_0 - e_0 \otimes \omega_0 \arrow[d, "\theta"] \\
e_1 \otimes e_0' \otimes \omega_0 + e_0 \otimes e_1 \otimes \omega_0 \arrow[r, "\partial"] & e_0' \otimes e_0' \otimes \omega_0 - e_0 \otimes e_0 \otimes \omega_0
\end{tikzcd}$$

と $H_0(\mathbb{W}) \cong R$. $H_i(\mathbb{W})=0$ $i \neq 0$

$H_0(I) \cong R$. $H_i(I)=0$ $i \neq 0$ より

仮定の φ_0 と φ_1 の間の chain homotopy を Φ として

次の合成を考える。

$$I \otimes \mathbb{W} \otimes C^{(2)} \xrightarrow{\Theta \otimes id} I^{(2)} \otimes \mathbb{W} \otimes C^{(2)} \underset{S}{\cong} \mathbb{W} \otimes (I \otimes C)^{(2)}$$

$$\xrightarrow{id \otimes \Phi^{(2)}} \mathbb{W} \otimes C^{(2)}$$ S は switching chain map.

この合成を $\tilde{\varphi}$ と記す。

$$I^{(2)} \otimes \mathbb{W} \otimes C^{(2)} \xrightarrow{\quad S \quad} \mathbb{W} \otimes (I \otimes C)^{(2)}$$

$$e_1 \otimes e_2 \otimes \omega \otimes c_1 \otimes c_2 \longmapsto (-1)^{|\omega||e_2| + |\omega||e_1| + |c_1||e_2|} \omega \otimes e_1 \otimes c_1 \otimes e_2 \otimes c_2$$

$$\downarrow T \qquad\qquad \downarrow T$$

$$(-1)^{|e_1||e_2| + |c_1||c_2|} e_2 \otimes e_1 \otimes T\omega \otimes c_2 \otimes c_1 \longmapsto (-1)^{|e_1||e_2| + |c_1||c_2| + |\omega|(|e_2| + |e_1|) + |c_2||e_1|} T\omega \otimes e_2 \otimes c_2 \otimes e_1 \otimes c_1$$

よって $\tilde{\varphi}$ は $R\Pi$ chain map で $\tilde{\varphi}(e_0 \otimes \omega \otimes c_1 \otimes c_2)$
$= \omega \otimes \varphi_0(c_1) \otimes \varphi_0(c_2)$ $\tilde{\varphi}(e_1' \otimes \omega \otimes c_1 \otimes c_2) = \omega \otimes \varphi_1(c_1) \otimes \varphi_1(c_2)$

従って $id \otimes \varphi_0^{(2)}$, $id \otimes \varphi_1^{(2)}$ $\mathbb{W} \otimes C^{(2)} \longrightarrow \mathbb{W} \otimes C^{(2)}$ は

$R\Pi$ chain homotop よって. $id \otimes_\Pi \varphi_0^{(2)}$ $id \otimes_\Pi \varphi_1^{(2)}$

$\mathbb{W} \otimes_\Pi C^{(2)} \longrightarrow \mathbb{W} \otimes_\Pi C^{(2)}$ は chain homotop となり $\varphi_{0*} = \varphi_{1*}$

ii). C から C′ への cochain homotopy は C から Hom(I, C′) への cochain map に自然に対応する。

著者　泉　宏明

住所　〒739-0145　　広島県東広島市八本松町宗吉 92-5

HomePage

http://www7a.biglobe.ne.jp/~popuri_art/izumi/