Φ を φ_0 から φ_1 への cochain homotopy とする。

$\tilde{\Phi}(c)(e_0')=\varphi_0(c)$ $\tilde{\Phi}(c)(e_0)=\varphi_1(c)$ $\tilde{\Phi}(c)(e_1)=\Phi(c)$ によって $\tilde{\Phi}$ $C\to \mathrm{Hom}(I,C')$ を定義する.

$\tilde{\Phi}(\delta c)(e_1)=\Phi(\delta c)=\varphi_0(c)-\varphi_1(c)-\delta\Phi(c)=\tilde{\Phi}(c)(\partial e_1)-\delta\circ\tilde{\Phi}(c)(e_1)$

等 故に well defined.

次の合成を考える. これを $\hat{\varphi}$ と記す.

$$\hat{\varphi};\quad \mathrm{Hom}(\overline{W},C^{(2)})\xrightarrow{\tilde{\Phi}^{(2)}_{\#}}\mathrm{Hom}(\overline{W},\mathrm{Hom}(I,C')^{(2)})$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}(I^{(2)}\otimes \overline{W},C'^{(2)})\xrightarrow{(\theta\otimes id)^{\#}}\mathrm{Hom}(I\otimes\overline{W},C'^{(2)})$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}(I,\mathrm{Hom}(\overline{W},C'^{(2)}))$$

第4の写像は標準的なもの.

第2の写像は次の合成.

$$\mathrm{Hom}(\overline{W},\mathrm{Hom}(I,C')^{(2)})\xrightarrow{L_{\#}}\mathrm{Hom}(\overline{W},\mathrm{Hom}(I^{(2)},C'^{(2)}))$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}(\overline{W}\otimes I^{(2)},C'^{(2)})\xrightarrow{S^{\#}}\mathrm{Hom}(I^{(2)}\otimes\overline{W},C'^{(2)})$$

$S^{\#}$ は switching chain map による.

$$L\quad \mathrm{Hom}(I,C')^{(2)}\longrightarrow \mathrm{Hom}(I^{(2)},C'^{(2)})$$
$$\overset{\cup}{f\otimes g}\longmapsto L(f\otimes g)(x\otimes y)=(-1)^{k|y|}f(x)\otimes g(y)$$
$$f\in\mathrm{Hom}(I_p,C'^{h})\qquad g\in\mathrm{Hom}(I_q,C'^{k})$$

L が chain map であることを示しておく.

$$L(\delta(f\otimes g))(x\otimes y)=L(\delta f\otimes g+(-1)^{|f|}f\otimes\delta g)(x\otimes y)$$
$$=L(f\circ\partial\otimes g+(-1)^{p}\delta\circ f\otimes g+(-1)^{|f|}f\otimes g\circ\partial+(-1)^{|f|+q}f\otimes\delta\circ g)$$

$(x \otimes y) = (-1)^{k|y|} f(\partial x) \otimes g(y) + (-1)^{p+(k+1)y} \delta_\circ f(x) \otimes g(y)$

$+ (-1)^{|f|+k|y|} f(x) \otimes g(\partial(y)) + (-1)^{|f|+q+k|y|} f(x) \otimes \delta_\circ g(y)$

一方.

$L(f \otimes g)(\partial(x \otimes y)) + (-1)^{p+q} \delta \circ L(f \otimes g)(x \otimes y)$

$= (-1)^{|y|k} f(\partial x) \otimes g(y) + (-1)^{|x|+k(|y|-1)} f(x) \otimes g(\partial y)$

$+ (-1)^{p+q+k|y|} \delta_\circ f(x) \otimes g(y) + (-1)^{p+q+k|y|+|f|-|x|} f(x) \otimes \delta \circ g(y)$

よって L は chain map

$n \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, C^{(2)})$ とする.

$\Phi^{(2)} n(\omega_i) = \sum_j f_{p_j}^{\omega_i} \otimes g_{q_j}^{\omega_i}$ とおく.

ここで $f_{p_j}^{\omega_i} \in (\mathrm{Hom}(I, C'))^{p_j}$

$g_{q_j}^{\omega_i} \in (\mathrm{Hom}(I, C'))^{q_j}$

$e \in I$ に対し　$\theta(e \otimes \omega) = \sum_i e_i \otimes e_i' \otimes \omega_i$ とする.

このとき.

$(\Psi(n)(e))(\omega) = \sum_i \overbrace{(-1)^{|\omega_i|(|e_i|+|e_i'|)}}(L_*(\sum_j f_{p_j}^{\omega_i} \otimes g_{q_j}^{\omega_i}))(e_i \otimes e_i')$

$= \sum_{i,j} (-1)^{|e_i'|(p_j-|e_i|)+(|e_i|+k_i|)|\omega_i|} f_{p_j}^{\omega_i}(e_i) \otimes g_{q_j}^{\omega_i}(e_i')$

一方.

$(\Psi(n)(e))(T\omega) = \sum_i \overbrace{(-1)^{|\omega_i|(|e_i|+|e_i'|)}} L(T \sum f_{p_j}^{\omega_i} \otimes g_{q_j}^{\omega_i})(T(e_i \otimes e_i'))$

$= \sum_{i,j} (-1)^{p_j q_j + |e_i||e_i'| + |e_i|(q_j - |e_i'|) + |\omega_i|(|e_i|+|e_i'|)} g_{q_j}^{\omega_i}(e_i') \otimes$

$f_{p_j}^{\omega_i}(e_i)$

故に $\hat{\Psi}$ $\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, C^{(2)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I, \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, C'^{(2)}))$

$$[\hat{\Psi}(u)(e_0)](\omega) = \hat{\Phi}_{\#}^{(2)}(u)(\omega)(e_0 \otimes e_0)$$
$$= \varphi_1^{(2)} \circ u(\omega)$$

$$[\hat{\Psi}(u)(e_0)](\omega) = \varphi_0^{(2)} \circ u(\omega)$$

よって $\varphi_{0*} = \varphi_{1*}$ $H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, C^{(2)})) \longrightarrow H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, C'^{(2)}))$

iii) Rをtrivialな作用により$R\pi$-moduleとみなす。このとき.

$$\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(C'^{(2)}, R)) \cong \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W} \otimes C'^{(2)}, R)$$

が成立する、i)により、$id \otimes \varphi_0^{(2)}$と$id \otimes \varphi_1^{(2)}$の間の$R\pi$ chain homotopyが存在する。これをΦとする。

$$\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(C'^{(2)}, R)) \cong \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W} \otimes C'^{(2)}, R) \xrightarrow{\Phi'^{\#}} \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W} \otimes C^{(2)}, R) \cong \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, \mathrm{Hom}(C^{(2)}, R))$$

が定義できる。これより $\varphi_0^* = \varphi_1^*$ が成立する.

Q.E.D

Theorem 2

i) Cをchain complex、Z cycleのつくるsub chain complex、Cのホモロジー群Hを$\partial = 0$としてchain complexとみなす、ξ $Z \longrightarrow C$は包含写像 η $Z \longrightarrow H$はprojectionで、η' $H \longrightarrow Z$を $\eta \circ \eta'$

[illegible] このとき $1 \otimes \xi^{(2)}$

$1\otimes\eta^{(2)}$ から定まる次の準同型は同型

$$H_*(\overline{W}\otimes_\pi H^{(2)}) \xrightarrow{\eta'_*} H_*(\overline{W}\otimes_\pi Z^{(2)}) \xrightarrow{\xi_*} H_*(\overline{W}\otimes_\pi C^{(2)})$$

ii) C を cochain complex C の cocycle のつくる sub cochain complex を Z で表わす。C の cohomology group H を $\delta=0$ で cochain complex とみなす。i) と同様に

$$H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, H^{(2)})) \xrightarrow{\eta'_*} H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, Z^{(2)})) \xrightarrow{\xi_*} H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, C^{(2)}))$$

は同型を与える。

proof

η

$Z \to C \to H$

$C \to C/Z \to H$

i) $\exists \zeta'\ C \to H$ s.t. $\zeta'\circ\xi = \eta$ なる chain map が存在する。$0 \to Z \xrightarrow{\xi} C \to C/Z \to 0$ を考えればよい。$\zeta = \xi\circ\eta'$ とおく。$\zeta_* = id$ $H \to H(C)$ 故に ζ は chain homotopy equivalence.

Lemma 1 より

ζ_* $H_*(\overline{W}\otimes_\pi H^{(2)}) \cong H_*(\overline{W}\otimes_\pi C^{(2)})$

$\zeta'\circ\zeta = id$ であるから

ζ'_* $H_*(\overline{W}\otimes_\pi C^{(2)}) \longrightarrow H_*(\overline{W}\otimes_\pi H^{(2)})$ は

ζ_* の逆写像.

ii) i)と同様.

注1) η_*は同型とは限らない.

注2) ここで体ということが本質的に使われている。

～ Cup Product と Cap Product の定義 ～

Def 3. $H^*(\mathrm{Hom}_{R\Pi}(W, H^*(X)^{(2)}))$ における cup product の定義.

$W^{(2)} = W \otimes W$ を対角作用により, $R\Pi$ chain complex とみなす. $R\Pi$ chain map $\lambda\ W \to W^{(2)}$ を

$$\lambda(\omega_i) = \sum_{j=0}^{[\frac{i}{2}]} (\omega_{2j} \otimes \omega_{i-2j} + \omega_{2j+1} \otimes T\omega_{i-2j-1})$$ で定義する.

この model は $S^\infty \xrightarrow{d} S^\infty \times S^\infty$ (対角写像) の. 前述の CW 分割に対する. equivariant diagonal approximation である.

λ は chain map であることが次のように示される.

$$\partial\lambda(\omega_i) = \sum_{j=0}^{[i/2]} \Big\{ (T+(-1)^{2j})\,\omega_{2j-1}\otimes\omega_{i-2j}$$
$$+\ \omega_{2j}\otimes(T+(-1)^{i-2j})\,\omega_{i-2j-1}$$
$$+\ (T+(-1)^{2j+1})\,\omega_{2j}\otimes T\omega_{i-2j-1}$$
$$+\ (-1)^{2j+1}\,\omega_{2j+1}\otimes T(T+(-1)^{i-2j-1})\,\omega_{i-2j-2}\Big\}$$

$$= \sum_{j=0}^{[i/2]} \Big\{ T\omega_{2j-1}\otimes\omega_{i-2j} + \omega_{2j-1}\otimes\omega_{i-2j}$$
$$+\ \omega_{2j}\otimes T\omega_{i-2j-1} + (-1)^i\,\omega_{2j}\otimes\omega_{i-2j-1}$$
$$+\ T\omega_{2j}\otimes T\omega_{i-2j-1} + (-1)\,\omega_{2j}\otimes T\omega_{i-2j-1}$$
$$+\ (-1)\,\omega_{2j+1}\otimes\omega_{i-2j-2} + (-1)^i\,\omega_{2j+1}\otimes T\omega_{i-2j-2}\Big\}$$

$$= \sum_{j=0}^{[i/2]} \Big\{ T\omega_{2j-1}\otimes\omega_{i-2j} + (-1)^i\,\omega_{2j}\otimes\omega_{i-2j-1}$$
$$+\ T\omega_{2j}\otimes T\omega_{i-2j-1} + (-1)^i\,\omega_{2j+1}\otimes T\omega_{i-2j-2}\Big\}$$

一方

$$\lambda\partial(\omega_i) = \lambda\big((T+(-1)^i)\,\omega_{i-1}\big)$$
$$= (T+(-1)^i)\sum_{j=0}^{[\frac{i-1}{2}]}\big(\omega_{2j}\otimes\omega_{i-2j-1} + \omega_{2j+1}\otimes T\omega_{i-2j-2}\big)$$
$$= \sum_{j=0}^{[i/2]}\Big\{ T\omega_{2j}\otimes T\omega_{i-2j-1} + T\omega_{2j+1}\otimes\omega_{i-2j-2}$$
$$+\ (-1)^i\,\omega_{2j}\otimes\omega_{i-2j-1} + (-1)^i\,\omega_{2j+1}\otimes T\omega_{i-2j-2}\Big\}$$

$\therefore\ \partial\lambda(\omega_i) = \lambda\partial(\omega_i)$

λ は $R\pi$ chain map

$H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, H^*(X)^{(2)}))$ における cup product を定義してゆこう.

$x \in \mathrm{Hom}(\overline{W}_p, (H^*(X)^{(2)})^q)$

著者　泉　宏明

住所　〒739-0145　　広島県東広島市八本松町宗吉 92-5

HomePage

http://www7a.biglobe.ne.jp/~popuri_art/izumi/