$v \in \mathrm{Hom}(\overline{W}_{p}, (H^*(X)^{(2)})^{q})$ に対し

$u \smile v \in \mathrm{Hom}(\overline{W}, H^*(X)^{(2)})$ を次のように定義する。

$$\overline{W} \xrightarrow{\lambda} \overline{W} \otimes \overline{W} \xrightarrow{h} H^*(X)^{(2)} \otimes H^*(X)^{(2)} \xrightarrow{\nu} H^*(X)^{(2)}$$

$h$ は $(-1)^{q|\omega_i|} u(\omega_i) \otimes v(\omega_i')$ とする.

$\nu$ は $\nu(\alpha \otimes \alpha' \otimes \beta \otimes \beta') = (-1)^{|\alpha'||\beta|}(\alpha \smile \beta) \otimes (\alpha' \smile \beta')$

で定義される準同型. 準同型　~~準同型~~　準同型

$u, v \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, H^*(X)^{(2)})$ 準同型 水増し

$\Rightarrow u, v \in \mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, H^*(X)^{(2)})$ である.

$\because$　$\nu(T(\alpha \otimes \alpha') \otimes T(\beta \otimes \beta'))$

$$= (-1)^{|\alpha||\beta'| + |\alpha||\alpha'| + |\beta||\beta'|} \alpha' \smile \beta' \otimes \alpha \smile \beta.$$

$$= T\nu(\alpha \otimes \alpha' \otimes \beta \otimes \beta')$$

$\lambda(\omega) = \sum_i \omega_i \otimes \omega_i'$ とおく.

$$(\delta(u \smile v))(\omega) = \sum_i \{(-1)^{|u\partial(\omega_i)||\omega_i'|} \nu(u\partial(\omega_i) \otimes v(\omega_i'))$$
$$+ (-1)^{|u(\omega_i)|(|\omega_i'|-1) + |\omega_i|} \nu(u(\omega_i) \otimes v(\partial\omega_i'))\}$$

$$(\delta u \smile v)(\omega) = \sum_i \{(-1)^{|u\partial(\omega_i)||\omega_i'|} \nu(u\partial(\omega_i) \otimes v(\omega_i'))\}$$

$$(u \smile \delta v)(\omega) = \sum_i \{(-1)^{|u(\omega_i)||\omega_i'|} \nu(u(\omega_i) \otimes v\partial(\omega_i'))\}$$

$$\delta(u \smile v) = \delta u \smile v + (-1)^{|u|} u \smile \delta v$$

以上より $H^*(\mathrm{Hom}_{RT}(W, H^*(X)^{(2)}))$ における
cup product が定義された。

同様に $H^*(\mathrm{Hom}_{RT}(W, Z^*(X)^{(2)}))$ における
cup product が定義される

Def 4 Cap Product の定義

$v \in \mathrm{Hom}(W_p, (H^*(X)^{(2)})^q)$

$c \in W_{p'} \otimes (H_*(X)^{(2)})_{q'}$ に対し

$\lambda \otimes id \quad W \otimes H_*(X)^{(2)} \longrightarrow W^{(2)} \otimes H_*(X)^{(2)}$ を

$\lambda \otimes id(c) = \sum r_i (\underbrace{c_i \otimes c_i' \otimes a_i \otimes a_i'}_{p'+q'})$ とおいて、

$v \frown c \in W \otimes H_*(X)^{(2)}$ を次で定義する

$$v \frown c = \sum_i (-1)^{p(q'-q)} r_i c_i \otimes \nu(v(c_i') \otimes a_i \otimes a_i')$$

ここで $\nu \quad H^*(X)^{(2)} \otimes H_*(X)^{(2)} \longrightarrow H_*(X)^{(2)}$

$$\nu(\alpha \otimes \alpha' \otimes a \otimes a') = (-1)^{|\alpha|(|a|-|\alpha'|)} \alpha \frown a \otimes \alpha' \frown a'$$

まず、$v \in \mathrm{Hom}_{RT}(W_p, (H^*(X))^q) \Rightarrow v \frown Tc = T(v \frown c)$
を示す。

$$v \frown Tc = \sum r_i Tc_i \otimes \nu(Tv(c_i') \otimes T(a_i \otimes a_i')) \text{ と}$$

$(-1)^{p(q'-q)}$

$\nu(T(\alpha \otimes \alpha') \otimes T(a \otimes a'))$

$= \nu((-1)^{|\alpha||\alpha'| + |a||a'|} \alpha' \otimes \alpha \otimes a' \otimes a)$

$= (-1)^{|\alpha||\alpha'| + |a||a'| + |\alpha'|(|a|-|\alpha|)} \alpha' \frown a' \otimes \alpha \frown a$

$= T\nu(\alpha\otimes\alpha'\otimes a\otimes a')$

また

$$\partial(v\frown c) = \sum_i (-1)^{p(q'-q)} r_i\partial c_i\otimes\nu(v(c_i')\otimes a_i\otimes a_i')$$

$$\lambda\otimes id(\partial c) = \sum_i \{ r_i\partial c_i\otimes c_i'\otimes a_i\otimes a_i' + (-1)^{|c_i|} r_i c_i\otimes\partial c_i'\otimes a_i\otimes a_i'\}$$ より.

$$v\frown\partial c = \sum_i r_i\{(-1)^{p(q'-q)}\partial c_i\otimes\nu(v(c_i')\otimes a_i\otimes a_i') + (-1)^{p(q'-q)+|c_i|} c_i\otimes\nu(v(\partial c_i')\otimes a_i\otimes a_i')\}$$

$$\delta v\frown c = \sum_i (-1)^{(p+1)(q'-q)} r_i c_i\otimes\nu(v\partial(c_i')\otimes a_i\otimes a_i')$$ より.

$$\partial(v\frown c) = v\frown\partial c + (-1)^{q'-q+1+p'-p-1}\delta v\frown c$$

$$\partial(v\frown c) = v\frown\partial c + (-1)^{|c|-|v|}\delta v\frown c$$

以上より $v\frown c$ により $H^*(Hom_{R\pi}(\overline{W}, H^*(X)^{(2)}))$ の元と $H_*(\overline{W}\otimes_{R\pi}H_*(X)^{(2)})$ の元の cap product が、$H_*(\overline{W}\otimes_{R\pi}H_*(X)^{(2)})$ の元として定義できる.

Theorem 3.

i) $\kappa$ $H_*(S^\infty\times_\pi X^2)\cong H_*(\overline{W}\otimes_\pi H_*(X)^{(2)})$ なる naturality をもつ同型が存在する.

ii) $\kappa$ $H^*(Hom_{R\pi}(\overline{W}, H^*(X)^{(2)}))\longrightarrow H^*(S^\infty\times_\pi X^2)$ なる naturality をもつ準同型が存在し、各 $H_q(X)$ が有限生成ならば、$\kappa$ は同型

iii) i), ii) の $\kappa$ は cup product 及び cap product を保つ.

proof

i) $\pi$ $S^\infty \times X^2 \longrightarrow S^\infty \times_\pi X^2$ projection

$$\begin{tikzcd}
S(S^\infty \times X^2) \arrow[r, "\pi_\#"] \arrow[d, shift left, "\nabla_\#"] & S(S^\infty \times_\pi X^2) \arrow[ddl, "\kappa_\# \text{ chain map}"] \\
W \otimes S(X)^{(2)} \arrow[u, shift left, "\nabla'_\#"] \arrow[d] & \\
W \otimes_{R\pi} S(X)^{(2)} &
\end{tikzcd}$$

$\kappa_\#$ が定義でき. $\nabla_\#$ $\nabla'_\#$ の性質より chain homotopy equivalence である。

$$\therefore \quad H_*(S^\infty \times_\pi X^2) \cong H_*(W \otimes_{R\pi} S(X)^{(2)})$$

これと Theorem $\Omega$ とにより.

$$H_*(S^\infty \times_\pi X^2) \cong H_*(W \otimes_\pi H_*(X)^{(2)})$$ が成立する.

naturality に関しては.

$H_*(W \otimes_\pi H(X)^{(2)}) \xrightarrow{\xi_*} H_*(W \otimes_\pi S(X)^{(2)})$ が natural 性をもつことを言えばよいが, $\xi_*$ を考えて見るならば容易である.

ii)

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(S(S^\infty \times X^2), R) & \mathrm{Hom}(S(S^\infty \times_\pi X^2), R) \arrow[l, "\pi^\#"'] \\
\mathrm{Hom}(W \otimes S(X)^{(2)}; R) \arrow[u, "\nabla^\#"] & \\
\mathrm{Hom}(W, \mathrm{Hom}(S(X)^{(2)}, R)) \arrow[u, "\text{標準的な同型}"] & \\
\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, \mathrm{Hom}(S(X)^{(2)}; R)) \arrow[u, "\text{inclusion}"] \arrow[uuur, "\nabla'^\#\ \text{dim map}"'] & \\
\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, S^*(X)^{(2)}) \arrow[u, "\mu_\#"] &
\end{tikzcd}
$$

$\mu : S^*(X)^{(2)} \longrightarrow \mathrm{Hom}(S(X)^{(2)}, R)$

$\nabla'^\#$ は $\nabla^\#$ $\nabla^\#$ の性質より chain homotopy equivalence.

$H_q(X)$ finite generated だとすると

$\mu_*$ $H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, S^*(X)^{(2)})) \longrightarrow H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, \mathrm{Hom}(S(X)^{(2)}, R))$

は同型であることが下の可換図式より証明される。

$$
\begin{tikzcd}
H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, S^*(X)^{(2)})) \arrow[r, "\mu_*"] \arrow[d, "\zeta_*"] & H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, \mathrm{Hom}(S(X)^{(2)}, R))) \arrow[d, "\zeta^*"] \\
H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, H^*(X)^{(2)})) \arrow[r, "\mu_*"] & H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, \mathrm{Hom}(H_*(X)^{(2)}, R)))
\end{tikzcd}
$$

$\zeta_*$ $\zeta^*$ は同型で、 $H_q(X)$ finite generated より $\mu_*$ も同型. よって 上行の $\mu_*$ も同型.

これと Theorem の naturality に関しては、i) と同様の方法により、ii) が成立する。

iii)

Step 1. cup product を保つことについて

$$H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, H^*(X)^{(2)})) \xrightarrow{\eta_*} H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, Z^*(X)^{(2)}))$$

を考える。$H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, Z^*(X)^{(2)}))$ には $H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, H^*(X)^{(2)}))$ とまったく同様に cup product が定義できる。

$u, v \in H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, H^*(X)^{(2)}))$ とする。

$$\zeta_*(\xi_*(\eta_*(u) \smile \eta_*(v))) = u \smile v.$$

$$\therefore\ \xi_*(\eta_*(u) \smile \eta_*(v)) = \zeta_*(u \smile v)$$

よって $H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, Z^*(X)^{(2)})) \xrightarrow{\xi_*} H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, S^*(X)^{(2)}))$
$\xrightarrow{\mu_*} H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, \mathrm{Hom}(S(X)^{(2)}, R)) \xrightarrow{\nabla^*} H^*(\mathrm{Hom}(S(S^\infty \times_\pi X^2), R)$

が cup product を保つことを言えばよい。

$$\because\ \nabla^* \mu_* \zeta_*(u \smile v) = \nabla^* \mu_*(\xi_*(\eta_*(u) \smile \eta_*(v)))$$
$$= \nabla^* \mu_* \xi_* \eta_*(u) \smile \nabla^* \mu_* \xi_* \eta_*(v)$$

しかし $\pi^\#(h \smile h') = \pi^\#(h) \smile \pi^\#(h')$ であるから

$$H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W, Z^*(X)^{(2)})) \longrightarrow H^*(\mathrm{Hom}(S(S^\infty \times X^2), R))$$

で cup product が保たれているということを言え

著者　泉　宏明

住所　〒739-0145　　広島県東広島市八本松町宗吉 92-5

HomePage

http://www7a.biglobe.ne.jp/~popuri_art/izumi/