ばよい。

d. 対角写像 $d_\#\ S(X)\longrightarrow S(X^2)$ と Alexander Whitney 写像 $\nabla\ S(X^2)\longrightarrow S(X)\otimes S(X)$ の合成を D で表わす。

acyclic model の方法により次の図式は $R\pi$ chain homotopy を除いて可換であることが示される。

$$\begin{tikzcd}
S(S^\infty\times X^2) \arrow[rr, "D"] \arrow[d, "\nabla_\#"] & & S(S^\infty\times X^2)^{(2)} \arrow[d, "\nabla_\#^{(2)}"] \\
\overline{W}\otimes S(X)^{(2)} \arrow[r, "\lambda\otimes D^{(2)}"] & \overline{W}^2\otimes(S(X)^{(2)})^{(2)} \arrow[r, "T"] & (\overline{W}\otimes S(X)^{(2)})^{(2)}
\end{tikzcd}$$

$s\times x\times y \longmapsto (s\times x\times y)\otimes(s\times x\times y)$

$w_0\otimes x\otimes y \longmapsto w_0\otimes w_0\otimes x\otimes x\otimes y\otimes y \longmapsto w_0\otimes x\otimes y\otimes w_0\otimes x\otimes y$

shuttling map.

$u, v\in \mathrm{Hom}\ (S(X),\ R)$ に対し

$u\smile v$ は合成,

$S(X)\xrightarrow{D} S(X)^{(2)}\xrightarrow{u\otimes v} R\otimes_R R=R$ に等しい。

記号を適当に使って証明する。また $s_\#$ により $\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W},\ Z^*(X)^{(2)})$ の元を自然に $\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, S^*(X)^{(2)})$ の元と考える。 $u, v\in Z(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, \cancel{S}\, Z^*(X)^{(2)}))$

$(\nabla^\# \mu_\#(u) \smile \nabla^\# \mu_\#(v))(f)$

$= \nabla^\# \mu_\#(u)\otimes \nabla^\# \mu_\#(v)\ D(f)$

$= \mu_\#(u)\otimes\mu_\#(v)\ \nabla_\#^{(2)}\circ D(f)$ であり

一方、$\mu_\#(u)\otimes\mu_\#(v)\,T\circ(\lambda\otimes D^{(2)})\circ\nabla_\#(f)=\mu_\#(u\smile v)$
$\nabla_\#(f)=\nabla^\#\mu_\#(u\smile v)(f)$ であることが示される。

故に $\nabla^\#\mu_\#(u)\smile\nabla^\#\mu_\#(v)$ は $\nabla^\#\mu_\#(u\smile v)$ と同じ cohomology 類を表わす。

$\lambda\otimes D^{(2)}\circ\nabla_\#(f)=\sum_i \omega_i\otimes\omega_i'\otimes D(\sigma_i)\otimes D(\sigma_i')$ とする。

ここで $D(\sigma_i)=\sum_{p+q=|\sigma_i|}\sigma_p^i\otimes\sigma_q^i$　$D(\sigma_i')=\sum_{p'+q'=|\sigma_i'|}\sigma_{p'}^{i'}\otimes\sigma_{q'}^{i'}$

σ_i σ_i' は特異単体としてよい。

$\mu_\#(u)\otimes\mu_\#(v)\,T\circ(\lambda\otimes D^{(2)})\nabla_\#(f)$

$$=\mu_\#(u)\otimes\mu_\#(v)\Big(\sum_{\substack{i\\ p+q=|\sigma_i|\\ p'+q'=|\sigma_i'|}}(-1)^{|\omega_i'||\sigma_p^i|+|\omega_i'||\sigma_{p'}^{i'}|+|\sigma_q^i||\sigma_{p'}^{i'}|}$$

$$\omega_i\otimes\sigma_p^i\otimes\sigma_{p'}^{i'}\otimes\omega_i'\otimes\sigma_q^i\otimes\sigma_{q'}^{i'}\Big)$$

$u(\omega_i)\otimes v(\omega_i')=\sum_\nu \alpha_\nu^i\otimes\alpha_\nu'^i\otimes\beta_\nu^i\otimes\beta_\nu'^i$ と

~~おき~~ おく。

$$=\sum_{\substack{\nu\ i\\ p+q=|\sigma_i|\\ p'+q'=|\sigma_i'|}}(-1)^{|\omega_i'||\sigma_p^i|+|\omega_i'||\sigma_{p'}^{i'}|+|\sigma_q^i||\sigma_{p'}^{i'}|}\alpha_\nu^i(\sigma_p^i)\otimes\alpha_\nu'^i(\sigma_{p'}^{i'})$$

$$\otimes\beta_\nu^i(\sigma_q^i)\otimes\beta_\nu'^i(\sigma_{q'}^{i'})$$

$$=\sum_{\nu\,i}(-1)^{|\omega_i'||\alpha_\nu^i|+|\omega_i'||\alpha_\nu'^i|+|\alpha_\nu'^i||\beta_\nu^i|}\alpha_\nu^i\smile\beta_\nu^i(\sigma_i)\otimes\alpha_\nu'^i\smile\beta_\nu'^i(\sigma_i')$$

$=\mu_\#(u\smile v)\nabla_\#(f)$

$=\nabla^\#\mu_\#(u\smile v)(f)$　　故に cup product が保たれる。

Step 2　cap product について

$H_*(\overline{W}\otimes_{R\pi} Z_*(X)^{(2)})$　$H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, Z^*(X)^{(2)}))$ にも

前とまったく同様に cap product が定義できる.

$v \in H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, H^*(X)^{(2)}))$

$c \in H_*(\overline{W}\otimes_{R\pi} H_*(X)^{(2)})$ に対し.

$$\zeta'_* \xi_*(\eta'_*(v)\frown\eta'_*(c)) = v\frown c \text{ より}$$

$$\xi_*(\eta'_*(v)\frown\eta'_*(c)) = \zeta_*(v\frown c) \text{ ゆえ.}$$

$H_*(\overline{W}\otimes_{\pi} Z_*(X)^{(2)})$ と $H^*(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}, Z^*(X)^{(2)}))$ における cap product が $H_*(S^\infty\times_\pi X^2)$ と $H^*(S^\infty\times_\pi X^2)$ の cap product に対応していることを言えばよい。

$\omega_q\otimes_\pi a \in Z(\overline{W}\otimes_\pi Z_*(X)^{(2)})$ とすると.

$$0 = \partial_{\#}(\omega_q\otimes_\pi a) = \omega_{q-1}\otimes_\pi ((T+(-1)^q)a)$$

$$\therefore\ (T+(-1)^q)a = 0$$

$$\partial(\omega_q\otimes a) = (T+(-1)^q)\,\omega_{q-1}\otimes a = (-1)^q\omega_{q-1}\otimes a + T\omega_{q-1}\otimes a$$

$$= T\omega_{q-1}\otimes a - \omega_{q-1}\otimes Ta \text{ である.}$$

$h' \in Z(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}\otimes S(X)^{(2)}, R))$ とする.

また, $v\in Z(\mathrm{Hom}_{R\pi}(\overline{W}_r, (Z^*(X)^{(2)})^S))$ とする.　$c = \omega_q\otimes a$ とおく.

$< \pi^{\#-1}\nabla^{\#}(h'), \ \pi_{\#}^{-1}\nabla^{\#}\mu_{\#}(v) \frown \pi_{\#}\nabla'(c) >$

$= < \nabla^{\#}(h'), \ \nabla^{\#}\mu_{\#}(v) \frown \nabla'_{\#}(c) >$

$= < \nabla^{\#}(h') \smile \nabla^{\#}\mu_{\#}(v), \ \nabla'_{\#}(c) >$

$= < \nabla^{\#}(h') \otimes \nabla^{\#}\mu_{\#}(v), \ D\nabla'_{\#}(c) >$

$= < h' \otimes \mu_{\#}(v), \ \nabla^{(2)}_{\#} \circ D\nabla'_{\#}(c) >$

$\nabla^{(2)}_{\#} \circ D$ と $T \circ \lambda \otimes D^{(2)} \circ \nabla_{\#}$ が RTT chain homotop

であることより、

$= < h' \otimes \mu_{\#}(v), \ T \circ \lambda \otimes D^{(2)} \nabla_{\#}\nabla'_{\#}(c) >$

$\nabla_{\#} \circ \nabla'_{\#} \simeq id$ RTT chain homotop であることより、

$= < h' \otimes \mu_{\#}(v), \ T \circ \lambda \otimes D^{(2)} (c) >$

$c = \omega \otimes a_1 \otimes a_2$ の形 にして考えてゆく。 ~~にしておく~~

ここで a_1, a_2 は特異単体としておけばよい

$\lambda(\omega) = \sum_i C_i \otimes C_i'$ とおく

$T \circ \lambda(\omega) \otimes D(a_1) \otimes D(a_2)$

$$= \sum_{\substack{i \\ p+q=|a_1| \\ p'+q'=|a_2|}} T \circ (C_i \otimes C_i' \otimes \sigma_p \otimes \sigma_q \otimes \sigma_{p'}' \otimes \sigma_{q'}')$$

ここで $D(a_1) = \sum_{p+q=|a_1|} \sigma_p \otimes \sigma_q$ $\quad D(a_2) = \sum_{p'+q'=|a_2|} \sigma_{p'}' \otimes \sigma_{q'}'$

$$= \sum_{\substack{i \\ p+q=|a_1| \\ p'+q'=|a_2|}} (-1)^{|C_i'|(|\sigma_p|+|\sigma_{p'}'|)+|\sigma_q||\sigma_{p'}'|} C_i \otimes \sigma_p \otimes \sigma_{p'}' \otimes C_i' \otimes \sigma_q \otimes \sigma_{q'}'$$

よって、

$< h' \otimes \mu_{\#}(v), \ T \circ \lambda \otimes D^{(2)}(\omega \otimes a_1 \otimes a_2) >$

$$= \sum_{\substack{ij \\ p+q=|a_1| \\ p'+q'=|a_2|}} (-1)^{|c_i|(|c_p|+|c_{p'}'|)+|c_q||c_{p'}'|} \langle h', c_i \otimes c_p \otimes c_{p'}' \rangle \alpha_j^i(c_q)\alpha_j^{i}(c_{q'}')$$

ここで $\nu(c_i) = \sum_j \alpha_j^i \otimes \alpha_j^i$

$$= \sum_{ij} (-1)^{|c_i|(|c_p|+|c_{p'}|)+|c_q||c_{p'}|} \langle h', c_i \otimes \alpha_j^i \frown a_1 \otimes \alpha_j^i \frown a_2 \rangle$$

$$= \langle h', \xi_\#(\nu \frown c) \rangle$$

$$= \langle \pi^{\#-1} \nabla^\#(h'), \pi_\# \nabla_\#' \xi_\#(\nu \frown c) \rangle$$

ここで次のことを注意しておく。

$$\partial(\nu \frown c) = \nu \frown \partial c + (-1)^{|c|-|\nu|} \delta\nu \frown c$$

$$= \nu \frown \partial c = \nu \frown T\omega_{q-1} \otimes a - \nu \frown (\omega_{q-1} \otimes Ta)$$

$$= \nu \frown (T\omega_{q-1} \otimes a) - T(\nu \frown (T\omega_{q-1} \otimes a))$$

$h' \in Z(\mathrm{Hom}_{R\pi}(W \otimes S(X)^{(2)}, R))$ で

$\nabla_\# \nabla_\#'$ は $R\pi$ chain homotop である。

R 体であるする

$\pi_\# \nabla_\#' \xi_\#(\nu \frown c)$ と $\pi_\# \nabla_\# 1 \# \xi_\#(\nu) \frown \pi_\# \nabla_\#' \xi_\#(c)$

は同じ homology 類を表わす。

よって cap product が保たれる。

Q.E.D

― 平方作用素の定義 ―

以上により $H_*(S^\infty \times_\pi X^2, R)$ $H^*(S^\infty \times_\pi X^2, R)$ の構造がほぼ完全に明らかになった。

ここで $R = Z_2$ として平方作用素を定義してゆく. 係数群はすべて Z_2 である.

Def 5. P の Definition

$\nu(\alpha) \in \mathrm{Hom}_\pi(W, H^*(X)^{(2)})$ を

$$\langle \nu(\alpha), \omega_i \rangle = \begin{cases} \alpha \otimes \alpha & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

と定義する.

$\nu(\alpha)$ は cocycle である.

$$P \quad H^*(X) \longrightarrow H^*(\mathrm{Hom}_\pi(W, H^*(X)^{(2)})) \xrightarrow{\lambda} H^*_{\sigma}(S^\infty \times_\pi X^2)$$

$$\alpha \longmapsto [\nu(\alpha)] \longmapsto \lambda[\nu(\alpha)]$$

の合成で定義する.

Def 6 Sq^k の定義

X を trivial な作用により π space とみなす.

$S^\infty \times_\pi X = RP^\infty \times X$ である.

$$\begin{array}{ccc} S^\infty \times X & \xrightarrow{id \times d} & S^\infty \times X \times X \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ S^\infty \times_\pi X & \xrightarrow{(id \times d)_\pi} & S^\infty \times_\pi X^2 \end{array}$$

が定まる.

著者　泉　宏明

住所　〒739-0145　　広島県東広島市八本松町宗吉 92-5

HomePage

http://www7a.biglobe.ne.jp/~popuri_art/izumi/