$H^*(X) \xrightarrow{P} H^*(S^\infty \times_\pi X^2) \xrightarrow{(id \times_\pi d)^*} H^*(RP^\infty \times X)$ の合成を考える. ω を $H^1(RP^\infty)$ の生成元とする.

$$(id \times_\pi d)^* P(\alpha) = \sum_{i+k=|\alpha|=q} \omega^i \times Sq^k \alpha$$ によって

$\alpha \in H^q(X)$ に対する $Sq^k \alpha \in H^{q+k}(X)$ が定義される.

Theorem 4. Sq の性質.

0) Sq^k は連続写像に関し自然である.

i) Sq^k は準同型.

ii) $\alpha \in H^q(X) \Rightarrow Sq^k \alpha = 0 \quad k > q. \qquad Sq^q \alpha = \alpha^2$

iii) $Sq^k(\alpha\beta) = \sum_{i+j=k} (Sq^i \alpha)(Sq^j \beta)$

iv) $Sq^k \alpha = \begin{cases} \alpha & k=0 \\ 0 & k<0 \end{cases}$

0) $f \quad Y \to X$ cont. $\quad \alpha \in H^*(X)$

P の定義より $f^* \quad H^*(X) \longrightarrow H^*(Y)$ と

$(id \times_\pi f^2)^* \quad H^*(S^\infty \times_\pi X^2) \longrightarrow H^*(S^\infty \times_\pi Y^2)$ に対し

$$P(f^*\alpha) = (id \times_\pi f^2)^* P(\alpha)$$

故に $(id \times_\pi d)^* P(f^*\alpha) = (id \times f)^* (id \times_\pi d)^* P(\alpha)$

$$\sum_{i+k=q} \omega^i \times Sq^k f^*(\alpha) = \sum_{i+k=q} \omega^i \times f^* Sq^k \alpha$$

$\therefore\quad Sq^k f^* = f^* Sq^k$

i) $P(\alpha,\beta)$ を次で定義しておく

$$< u(\alpha,\beta)\ ,\ \omega_i > = \begin{cases} \alpha\otimes\beta+\beta\otimes\alpha & i=0 \\ 0 & i\neq 0 \end{cases}$$

とするとき $u(\alpha,\beta)$ は $\mathrm{Hom}_\pi(W, H^*(X))$ の cocycle であるから, κ. $H^*(\mathrm{Hom}_\pi(W, H^*(X))) \longrightarrow H^*(S^\infty\times_\pi X^2)$ による $[u(\alpha,\beta)]$ の image を $P(\alpha,\beta)$ と記す.

$P(\alpha,\beta) = \pi_!(\alpha\times\beta)$ である.

ここで $S^\infty\times X^2 \xrightarrow{\pi} S^\infty\times_\pi X^2$ の transfer $\pi_!$ を

$$\begin{array}{ccc} H^*(S^\infty\times X^2) & \xrightarrow{\pi_!} & H^*(S^\infty\times_\pi X^2) \\ \wr\Vert & 1\times a & \\ & \uparrow & \\ H^*(X^2) & a & \end{array}$$

により $H^*(X^2) \xrightarrow{\pi_!} H^*(S^\infty\times_\pi X^2)$ とみなしたもの.

W は S^∞ の regular な cell 分割に対応するものである. natural な chain ~~map~~ homotopy equivalence $W\otimes S(X)\otimes S(X) \longrightarrow S(S^\infty)\otimes S(X)\otimes S(X)$ として H $W_1\otimes S(X)\otimes S(X) \longrightarrow S_1(S^\infty)\otimes S(X)\otimes S(X)$ で $\omega_1\otimes\sigma\otimes\sigma' \mapsto a\otimes\sigma\otimes\sigma'$ $\omega_0\otimes x\otimes y \longrightarrow z_0\otimes x\otimes y$ $x, y\in S_i(X)$ $z_0\in S_0(S^\infty)$ なるものがとれる.

また

$$\begin{tikzcd} \pi' \otimes S(X) \otimes S(X) \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\nabla'_\#"] & S(S^\infty) \otimes S(X) \otimes S(X) \\ S(S^\infty \times X \times X) \arrow[ur, "\hat{\nabla}_\#"'] & \end{tikzcd}$$

$\hat{\nabla}_\#$ alexander Whitney map

は chain homotopy.

$< P(\alpha, \beta), a >$ $\quad a = \chi^{-1}(a)$ $\quad \alpha \in H_*(\pi' \otimes_\pi H_*(X))$

$= <\alpha, y><\beta, z> + <\alpha\ z \times \beta\ y>$ $\quad a = [w_0 \otimes_\pi y \otimes z + \sum_{i>0} w_i \otimes_\pi x_i \otimes x_i']$

一方,

$<\pi_!(\alpha \times \beta), a> = <1 \times \alpha \times \beta, \pi_! a>$ $\quad \alpha = [x]$

$= <\hat{\nabla}^\#(1 \otimes x \otimes x'), \nabla'_\#(w_0 \otimes y \otimes z) + T\nabla'_\#(w_i \otimes y \otimes z)>$ $\beta = [x']$ とする.

$= <[x], y><[x'], z> + <[x'], z><[x], y>$

$= <P(\alpha, \beta), a>$ $\quad \therefore P(\alpha, \beta) = \pi_!(\alpha \times \beta)$

$$P(\alpha + \beta) = P(\alpha) + P(\beta) + P(\alpha, \beta)$$

$$= P(\alpha) + P(\beta) + \pi_!(\alpha \times \beta)$$

$$\begin{tikzcd} H^*(S^\infty \times X^2) \arrow[r, "(id \times d)^*"] \arrow[d, "\pi_!"] & H^*(S^\infty \times X) \arrow[d, "\pi_!"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & H^*(S^\infty) \otimes H^*(X) \arrow[d, "\pi_! \otimes id"] \\ H^*(S^\infty \times_\pi X^2) \arrow[r, "(id \times_\pi d)^*"] & H^*(S^\infty \times_\pi X) \arrow[r, phantom, "\cong"] & H^*(RP^\infty) \otimes H^*(X) \end{tikzcd}$$

なる可換図式において右端の $\pi_!$ は 0 より

$(id \times_\pi d)^* \pi_! = 0$ $\quad H^*(S^\infty \times X^2) \longrightarrow H^*(S^\infty \times_\pi X^2)$

$$\begin{array}{c} H^*(S^\infty \times X^2) \\ \cong \\ H^*(X^2) \end{array}$$

$$(id \times_\pi d)^* P(\alpha+\beta) = (id \times_\pi d)^* P(\alpha) + (id \times_\pi d)^* P(\beta)$$

$$\sum_{i+k=q} \omega^i \times Sq^k(\alpha+\beta) = \sum_{i+k=q} \omega^i \times (Sq^k\alpha + Sq^k\beta)$$

$$Sq^k(\alpha+\beta) = Sq^k\alpha + Sq^k\beta.$$

ii) $Sq^k\alpha = 0$ （$k>q$）は定義より明らか．

π^* $H^*(S^\infty \times_\pi X^2) \longrightarrow H^*(X^2)$ を

π $S^\infty \times X^2 \longrightarrow S^\infty \times_\pi X^2$

π^* $H^*(S^\infty \times_\pi X^2) \longrightarrow H^*(S^\infty \times X^2) \cong H^*(X^2)$ とする．

このとき， $\pi^* P(\alpha) = \alpha \times \alpha$ であることが容易にわかる． ∴ $\pi^*(id \times_\pi d)^* P(\alpha) = d^* \pi^* P_0(\alpha) = \alpha \smile \alpha$.

一方 $\pi^*(\sum_{i+k=q} \omega^i \times Sq^k\alpha) = Sq^q\alpha$

$$Sq^q\alpha = \alpha \smile \alpha$$

iii) cup product の定義より，

$$P(\alpha\beta) = P(\alpha)P(\beta)$$

$$d^* P(\alpha\beta) = d^* P(\alpha) \smile d^* P(\beta)$$

$|\alpha| = p$ $|\beta| = q$ とする．

$$\sum_k \omega^{p+q-k} \times Sq^k(\alpha\beta) = (\sum_i \omega^{p-i} \times Sq^i\alpha)(\sum_j \omega^{q-j} \times Sq^j\beta)$$

$$= \sum_k \omega^{p+q-k} \times (\sum_{i+j=k} (Sq^i\alpha)(Sq^j\beta))$$ より

iv) $S(X)$ を trivial な作用により $Z_2\pi$ chain complex とみなす　$W\otimes S(X)$ を対角作用により π の作用する chain complex とみなす. acyclic model の方法により、連続写像 $f: X\to Y$ に関し自然な $Z_2\pi$ chain map $\chi: W\otimes S(X) \longrightarrow W\otimes S(X)^{(2)}$ が存在する
$(w_0\otimes x \longmapsto w_0\otimes x\otimes x \quad x\in S_0(X))$
また Theorem 2 と同様に $\tilde{\nabla}_\#: W\otimes S(X) \longrightarrow S(S^\infty\times X)$ $Z_2\pi$ chain homotopy equivalence が存在する. Theorem 3 と同様に $W\otimes_\pi S(X) \xrightarrow{\tilde{\nabla}_{\#\pi}} S(S^\infty\times_\pi X)$ は homotopy equivalence である. また、

$$\begin{tikzcd}
W\otimes S(X) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, shift right, "\tilde{\nabla}_\#"'] & W\otimes S(X)^{(2)} \arrow[d, shift left, "\nabla'_\#"] \\
S(S^\infty\times X) \arrow[r, "(id\times d)_\#"] \arrow[u, shift right, "\tilde{\Delta}_\#"'] & S(S^\infty\times X^2) \arrow[u, shift left, "\Delta_\#"]
\end{tikzcd}$$

は $Z_2\pi$ chain homotopy を除いて可換である.
故に

$$\begin{tikzcd}
W\otimes_\pi S(X) \arrow[r, "\chi_\pi"] \arrow[d, shift right, "\tilde{\nabla}_{\pi\#}"'] & W\otimes_\pi S(X)^{(2)} \arrow[d, shift left, "\nabla'_{\pi\#}"] \\
S(S^\infty\times_\pi X) \arrow[r, "(id\times_\pi d)_\#"] \arrow[u, shift right, "\tilde{\Delta}_{\pi\#}"'] & S(S^\infty\times_\pi X^2) \arrow[u, shift left, "\Delta_{\pi\#}"]
\end{tikzcd}$$

は $Z_2\pi$ chain homotop である.
次に $\chi: W\otimes S(X) \longrightarrow W\otimes S(X)^{(2)}$ を acyclic model の方法により構成するときの様子をく

わしく述べてみよう。

Δ^qの線型r単体を次のように定義する。特異r単体 $\rho: \Delta^r \to \Delta^q$ で $\rho(sy+tz)=s\rho(y)+t\rho(z)$ ($y, z\in\Delta^r$ $s+t=1$ $s, t\geq 0$) なるものである。Δ^qの線型r単体 $(P_{i_0},\cdots P_{i_r})$ ($0\le i_0<i_1<\cdots<i_r\le q$) は Δ^rの頂点 $1, 2, \cdots, r$ を Δ^qの頂点（これをP_1, $P_2, \cdots P_q$としておく）を$P_{i_0}\cdots P_{i_r}$に写すものとする。$S_r(\Delta^q)$の部分加群$C_r(\Delta^q)$をΔ^qの線型r単体$(P_{i_0}\cdots P_{i_r})$ ($0\le i_0< i_1\cdots<i_r\le q$) 全体によって生成される部分加群であるとする。

このとき $C(\Delta^q)=\{C_r(\Delta^q)\}$ は $S(\Delta^q)$ の subcomplex であり、$C(\Delta^q)$ は非輪状であることが示される。χ $W\otimes S(X)\longrightarrow W\otimes S(X)^{(2)}$ の構成のしかたを考察する。$\chi=\{\chi_r\}$ はrに関する帰納法により定義される。それはまず $\chi(\omega_s\otimes 1_q)\in(W\otimes S(\Delta_q)^{(2)})_r$ [redacted] ($r=s+q$, 1_q $\Delta^q\xrightarrow{id}\Delta^q$) が定義され、一般の特異単体 σ $\Delta^q\longrightarrow X$ に対しては $\chi(\omega_s\otimes\sigma)=id\otimes\sigma_\#\otimes\sigma_\#$ により定義された。ところが $C(\Delta^q)$ は非輪状であるから、$\chi(\omega_s\otimes 1_q)\in(W\otimes C(\Delta_q)^{(2)})_r$ としてよい。この時、

著者　泉　宏明

住所　〒739-0145　　広島県東広島市八本松町宗吉 92-5

HomePage

　　　http://www7a.biglobe.ne.jp/~popuri_art/izumi/