北海道地区数学教育協議会　　2004. 2. 1発行

高校サークルだより47

文責:清水　貞人

♪11月に10周年を迎えます!

1月10日に2004年度総会を行いました。11月にサークル結成10周年を迎えるにあたり、周年事業として『サークルだより集』の発行と、『記念パーティー』の開催が了承されました。後日、『サークルだより集』の発行を担当する真鍋さんからみなさんのところに、一緒に載せるエピソードなどの執筆依頼があると思いますので宜しくお願いします。また、札幌市立博物館の事業の一環として、『市民講座』の実施を札幌の会員が中心となって検討していくことになりました。最後に、今年の道数協全道大会は、澤尻さんが勤める札幌星園高校で行われます。全道大会が高等学校で開催されるのは今回が初めてです。多数の参加を期待しています！

≪2004年度活動計画≫

1／10･11　総会･例会(札幌･あけぼの旅館)
3／6･7　例会(静内･静内温泉)
6／12･13　例会(稚内)
7／29･30　全道大会(札幌･札幌星園高校)
11／13･14全道合研(札幌)
12／26･27冬期研(札幌･あけぼの旅館)

≪数教協全国高校集会≫

期日:2004年3月27日(土)･28日(日)
会場:長野県上諏訪温泉　諏訪湖ホテル

≪数教協第52回全国大会≫

期日:2004年8月3日(火)～5日(木)
会場:岐阜県高山市　高山市民文化会館

≪３月例会のご案内≫

“馬”と“桜”の町「静内」で数学･数学教育について語り合いませんか。季節柄桜を見て楽しむことはできませんが、静かにのんびりとできる静内温泉が待っています。温泉で日頃の疲れを癒し、レポート発表･交流会では数学に対する思いを語って下さい。仲間との語らいで明日からの活力をもらいましょう。

石島悟(静内農業高校)

①期　日　3月6日(土)･7日(日)
②会　場　静内町町民休養ホーム(静内温泉)
TEL:01464－4－2111
①内　容
3／6(土)
14:30　受付
15:00　小学校の実践から学ぶ
講師:沼里喜代三さん
(道数協日高算数サークル)
17:00　レポート発表①
18:00　夕食･交流会
3／7(日)
9:00　レポート発表②
12:00　終了･解散
④参加費　1，000円
⑤宿泊費　6，500円(1泊2食付)
⑥申込み　2月20日(金)までFAXにて

※3月の全国高校集会に参加を予定されている方はいませんか。事務局からほんの僅かではありますが旅費を補助しますのでご連絡下さい。事務局メールアドレスshimizoo@r2.dion.ne.jp

1　2004年１月例会報告
報告者　成田收

一月例会に報告されたレポートの内容を紹介します。

1.1　ピタゴラス三角形の作図
加藤　渾一

ピタゴラスの定理は「直角三角形の三辺の長さを a, b, c とし，c を斜辺とするとき，a, b, c の間には $a^2 + b^2 = c^2$ が成立する．逆に，三角形の三辺 a, b, c が $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすとき，三角形は c を斜辺とする直角三角形である.」というものですが，この条件を満たす整数の組 a, b, c をピタゴラス数といいます.

加藤先生の問題意識は，任意の，ピタゴラス数が与えられたとき，三辺が，その比になっている三角形（ピタゴラス三角形）をどのようにしたら，美しく，単純な技法で描くことができるか，ということです．また，その技法は，正方形の折り紙を折る技法の流れの中にあり，開いたときに折り跡としてピタゴラス三角形が見えているかどうかにもこだわっています.

さらに，折り跡が残らなくてもよいと考えると，芳賀折り（正方形の下部の頂点を上辺を $m : n$ に分ける点にあわせて折る.）によって瞬時に（$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$ であるピタゴラス三角形を折ることが）達成できることを伝えています.

その手法の単純さと，できあがった三角形の比が整数比であるということの落差がたいへん神秘的に感じられる報告でした.

1.2　１次関数と２次関数の指導
氏家　英夫

前回の，１次関数と２次関数の指導の不具合を改善した改訂版です.
一次関数，２次関数を等速運動，等加速運動を通じて指導するものです.
p 秒後に q の位置（初期条件）にあった物体が
a m/秒で等速運動をするときの
x 秒後の物体の位置 y は

$$y - q = a(x - p)$$

とあらわされる．これを一次関数の標準形とする.
すると，
p 秒後に q の位置（初期条件）にあった物体が
等加速運動をするときの
x 秒後の物体の位置 y は

$$y - q = a(x - p)^2$$

とあらわされる．これを二次関数の標準形とする.
というように，形式が類似性を持つことになる.

この方法の利点は，グラフの平行移動が平行移動の概念をまったく使わずに，自然に理解されることです.
つまり，初期条件が (p, q) の位置から物体の等加速運動が起こるわけですから，(p, q) を頂点にしてグラフを書けばよいことは，一目瞭然になるわけです.
たいへんすぐれた指導方法だということができます.

1.3　ガウスが歩んだ道
真鍋　和弘

青年ガウスが正１７角形を定規とコンパスのみで作図することができることを示した方法を正５角形を使って，そのアイデアを紹介してくれたものです.

この方法であれば，高校生と一緒に楽しむこともできそうです.
また，正５角形の作図法をクリアーした高校生は，正１７角形の作図法にのめり込んでいくのではないかとも思われます.

その中心的な部分は，

$$z^5 - 1 = 0$$

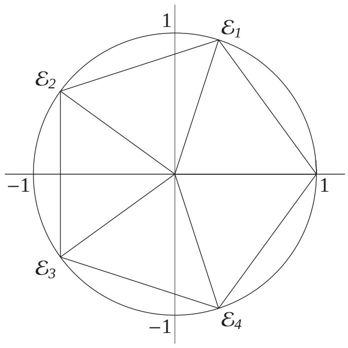
の根を具体的に作図可能であることを示せばよいことになります.

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

ですから,

$$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$$

の虚根を作図することが問題になります.
したがって,
$z^4+z^3+z^2+z+1=0$ の虚根を
$\varepsilon_1 = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ として、
$\varepsilon_1, \varepsilon_1^2=\varepsilon_2, \varepsilon_1^3=\varepsilon_3, \varepsilon_1^4=\varepsilon_4$ とします.



このとき,
$\sigma=\varepsilon_1+\varepsilon_4, \tau=\varepsilon_2+\varepsilon_3$ とすると,

$$\begin{aligned}\sigma+\tau &= \varepsilon_1+\varepsilon_4+\varepsilon_2+\varepsilon_3=-1\\ \sigma\tau &= (\varepsilon_1+\varepsilon_4)(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\\ &= \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4=-1\end{aligned}$$

となるため,
σ, τ は

$$w^2+w-1=0$$

の2根になります.
この根は

$$\sigma=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \tau=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

となります.
$\sqrt{5}$ は作図可能ですから, $\sigma=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
は作図可能です.
また,

$$\varepsilon_1+\varepsilon_4=\sigma\ ,\ \varepsilon_1\varepsilon_4=1$$

ですから,
$\varepsilon_1, \varepsilon_4$ は,

$$x^2-\sigma x+1=0$$

の根です. したがって,

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma+\sqrt{\sigma^2-4}}{2}, \varepsilon_4=\frac{\sigma-\sqrt{\sigma^2-4}}{2}$$

となり,
ε_1 は作図可能です.

ここで, 根の対称性を根拠に,

$$\sigma=\varepsilon_1+\varepsilon_4, \tau=\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

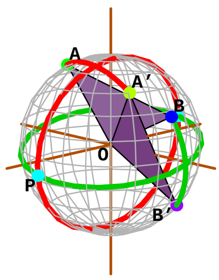
とおいたものが,
ガウスの f 項周期（この場合は2項周期）で, ここにガウスの整数に対する深い洞察が見えている, というものです.

1.4 3次元の回転が球面に自由に作用することの初等的証明

成田 收

これは, 筆者が取り組んでいる,「バナッハ・タルスキーの定理」を高校生を含む市民を対象とした市民講座の教材にする取り組みの中で必要になる事実です.
これを示すためには, 三次元空間で, どんな回転を合成しても, その結果は, ある回転軸を中心とする単一の回転に等しくなること. 簡単にいうと, 回転の合成は回転であることを示せばよいことになります.

今回その初等的な証明ができたと考えられるので報告させてもらったものです.



その方法は，回転では，正規直交基底が正規直交基底に移ること，反転が起こらないこと（右手系が左手系にかわらないこと）に依拠して，具体的にある回転軸を見つけ，単一の回転をすることによって，任意の正規直交基底を任意の正規直交基底に重ね合わせることができることを示すものです．

1.5　数列をどう教えるべきか

渡邊　勝

数列とは，関数である．その定義域が離散的な関数として数列を把握し，連続な関数の扱いにおける微分法，積分法に対応する，離散的な関数の扱いとして，差分法，和分法を明確に定義して教えることが，数列の姿を正しく伝えることにつながるのではないかという主張です．同時に，数列を自然に扱うためには，西欧でふつうに行われているように，自然数を０から始めるのが良いと主張しています．a_n の記号法の代わりに $p(n)$ を使います．

$p(0)$ を「原項」と呼ぶ．
等差数列の一般項は $p(n)=p(0)+d\cdot n$，等比数列の一般項は $p(n)=ar^n$ となります．
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}p(k)=p(0)+p(1)+p(2)+p(3)+\cdots+p(n)$ を
$\sum p(n)$ とあらわし，
これを和（和分）と呼ぶ．
和分は連続関数では積分に当たるものであるため，基本的な関数の不定積分をあらかじめ検討しておくのと同様に，基本的な関数の和分について調べておく．

$\sum 1=n$

$\sum n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$\sum n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

などとなる．
和分は原項から第 n 項までの $n+1$ 項の和を表すことになるため，等比数列の公式のみが
$\sum r^n=\dfrac{a(r^{n+1}-1)}{r-1}$ となり，
少し変わって見える．

$\Delta p(n)=p(n+1)-p(n)$ を $p(n)$ の差分という．(この関数値を並べたものが階差数列である)
連続関数では微分に当たるものであるため，基本的な関数の微分をあらかじめ検討しておくのと同様に，基本的な関数の差分について調べておく．
$\Delta n=1$
$\Delta n^2=2n+1$
$\Delta n^3=3n^2+3n+1$ などとなる．

すると，差分，和分の線形性を使って計算できることは，微分積分に同じであり，微分積分の基本定理
$F(x)=\displaystyle\int\frac{d}{dx}F(x)dx+C$ に対応して，
$p(n+1)=\sum\Delta p(n)+p(0)$ がいえるが，
これは，階差数列を用いて一般項を求めることを意味している．
このように考えると，数列教材全体をたいへん見通しよく展望することができる，という報告でした．

1.6　"実感できる"微分積分の授業を

和田　博

和田さんの微積分が２月の全国研究会議で検討されます．そこへ，清水さんも提言者として出席して，数学教育のニュースタンダードを確立することが大切だ，そのニュースタンダードは多くの市民に支持されるものでなければならないと訴えてきます．
その道は，
内包量から比例・微積分へ
倍・割合・比例から指数関数へ
タイルの発展としての数・式の計算
について小中高の一貫カリキュラムとして期待されるとしています．
今回は，　内包量から比例・微積分への具体的例として和田さんの微積分が

検討されるということで，和田さんのレポートを，清水さんが代弁して報告してくれたものです．

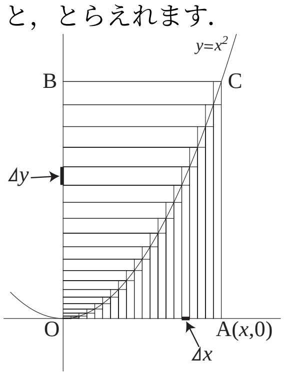
その内容は豊富で，限りあるスペースでは紹介し切れませんが，微積分の創始者であるライプニッツの無限小の扱いに通じるものです．いったん無限小の世界に入ってしまえば，曲線は直線ですから，一次元の傾きの世界（正比例の世界）に入って見通しが良くなります.（微小部分の誤差が気になって，一次元の世界に入りきれなかった人は困るだろうな，という議論も出ました）.

積分も，速度 v と時間 t の関係の $v-t$ グラフで導入され，１あたり量×土台量のかけ算の拡張，$v=v(t)$ のグラフと t 軸の間の面積を求める問題としてとらえられます.
したがって，整関数の積分は区間 $[0,x]$ の，$y=x^2$ のグラフと x 軸との間にできる面積を求めることから求められます.

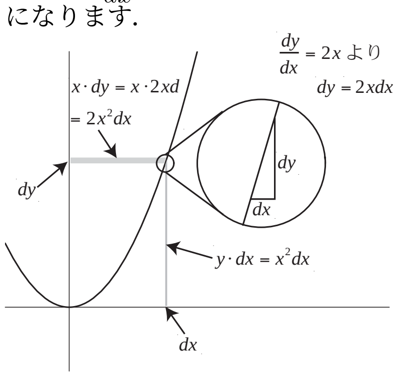
その方法は，
$\mathrm{O}(0,0),\mathrm{A}(x,0),\mathrm{C}(x,x^2),\mathrm{B}(0,x^2)$ とするとき，
$y=x^2$ のグラフが面積が x^3 の長方形 OACB を $1:2$ に分割することを理解することによって，

$$\int_0^x x^2dx=\frac{1}{3}x^3$$

と，とらえれます.



$1:2$ に分割することをどう見抜くかというと，上の図のように長方形OACBが $y=x^2$ のグラフによって，分割された２つの部分のうち，曲線の下側の部分は縦線形に，曲線の上側の部分は，区分が対応するように，横線形に分割します.
そのとき，縦線形の長方形の幅を Δx とし，横線形の長方形の幅は，Δy とします.
このことを，分割を細かくして，無限小の世界で見ると，
下図のように，縦線の幅は dx，横線の幅は dy になります．それぞれに，長さをかけると無限小の面積になりますが，
縦線は，$y\cdot dx=x^2dx$,
横線は，$x\cdot dy=xdy$ になります.
ここで，$\dfrac{dy}{dx}=2x$ ですから，$dy=2xdx$ になります.



したがって，縦線の面積と横線の面積の比は，

$$x^2dx:xdy=x^2dx:x2xdx=1:2$$

となります.
対応する「線分」の「面積」の比が $1:2$ なので，曲線の下側と上側の図形の面積の比も $1:2$ になります.
$y=x^n$ の時も同様で，
$\dfrac{dy}{dx}=nx^{n-1}$ ですから，$dy=nx^{n-1}dx$ となるため，長方形の面積 x^{n+1} が $1:n$ に分割されるため，曲線の下側の面積は，x^{n+1} の $\dfrac{1}{n+1}$ であることがわかります.
すなわち，
$\displaystyle\int_0^x x^ndx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ がごく自然に，視覚的に理解されてしまう，というすぐれものです.
異論は多く出されましたが，検討に値するものと感じました.

第34回冬季研に参加して

真鍋　和弘（高校サークル）

■小・中・高の実践交流(一日目)

全体会は小・中・高から各 1 本ずつの報告がありました.内容は

(1)「倍と分布」の授業（丹尾春彦)
(2)一刀切り(高岡聰)
(3)「2 次関数を究める」とその後（片岸洋)

の 3 つです.

(1)は量の倍という代数的な概念を中心に,
5 年生に乗法と除法を指導した報告です.数の乗除を量×量、量÷量という視点から説明しようとすると,なかなか厄介です。その点倍という概念は子どもたちにも直感的な理解が可能なので,分数の計算を楽しむことができます。逆オペレーターを使えば分数の割算もへっちゃらです。

(2)は 1 回の一刀切りでアルファベットや,
3 角形,4 角形などの多角形を切り抜く方法の紹介です。最初はどうしてそのようなことがことが出来るのか不思議でしたが,実際にやってみると,幾何学における対称性の役割りが少し見えてきました。

(3)は高校数学の柱の 1 っである 2 次関数の授業実践の報告です。なぜ 2 次関数なのか?小中高の関連の中から 2 次関数の本質を解明することが求められています。

■中.校分科会(2 日目)

(1)面積を水で「測る」(菊地三郎)
(2)ジグソウパズル、紙のバンドがつくる幾何学（藤崎巽)
(3)平面幾何の公理系(高橋哲男)
(4)2 次方程式を「4 倍法」で(三輪裕)
(5)力学の線型性について（真鍋和弘)
(6)モンティホール・ジレンマ(清水貞人)

中・高合同の分科会には上の 6 本の報告があり,たいへん充実したものとなりました。

(1)は水で測る面積シリーズの最新版です。ピタゴラスの定理からの帰結として.二つの三日月状の面積の和が直角 3 角形の面積に等しくなることが実際に確かめられました。

(2)では 2 つの語題が紹介されました.最初は、ジグソウパズルのピースの作り方。回転対称をうまく利用しています。次に、紙のバンドが作る幾何学。中央に線の入った帯状の紙を貼り合わせて輪(バンド)を作り、これらを直角に貼り合わせて、ハサミで中央の線に沿って切るとどうなるでしょうか？一回ひねってメービウスの輪にして、同じことをすると,もっと面白いことが起こります.

(3)は中学校幾何を再構成するプランの中から、角と平行の公理の紹介です。4 本の直線によって平面はいくつの部分に分けられるか?といっ問題(答は 5 ～ 11)から,平行線の定義が導かれるところがユニークです。議論が進み、ユークリッド幾何や非ユークリッ幾何の公理系にまで話が及びました。

(4)は昨日の 2 次関数にも関連のある 2 次式の平方完成についての報告です.一般の 2 次方程式　　$ax^2 + bx + c = 0$

を平方完成しようとすると必ず分数がでてきますが、両辺を 4 倍してやると,

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

となります。これを 4 倍法といいます。面積図を用いると 4 倍法の幾何学的な意味が見えてきます。中・高合同の分科会ならではの議論が続きました。

(5)も 2 次関数に関する話です。投げ上げの例から 2 次関数を導入しようとすると,どうしても最初から,

$$y = 30x - 5x^2$$

という式(初速度 30m/s、5 は重力加速度
$g = 9.8\ m/s^2$ の約 1/2)を天下り的に与えることになります。なぜ、$30x$ と $-5x^2$ とが合成されるのか？という疑問が依然として残ります。物理的には Newton の運動方建式

$$d^2y/dx^2 = -g$$

を解くことに帰着されますが、物理を習わない高校生にも納得できるような説明が必要でしょう。

(6)は,確率に関して一見経験と矛盾すると
感じられる例「モンティホール・ジレンマ」の紹介です。著名なハンガリ－出身の数学者エルディシュも間違えた有名な問題です。実際にトランプを使って,この現象が「正しい」ことを参加者全員が追体験しました。確率について考える時、公理的な方法だけでなく,実験的な体験も必ず必要なことを、この例は教えてくれているような気がします.