2005.7.8　　　　　　第５４号

高校サークルだより

道数協高校サークル発行

猛暑が続きますが、会員の皆さまいかがお過ごしょうか？まもなく夏休み、教員の研修権を活かして全道大会、全国大会に参加しましょう。今年の全道大会は初めて十勝で開催されます。.豊かな自然に包まれた真夏の音更町でお会いしましょう。

第45回全道数学教育研究大会

2005年７月28日(木)、29日(金)
音更町立音更中学校(音更町多陽が丘1)
【プログラム】
28日(木)
　わくわく講座・実践報告
　記念講演「数学を楽しむ３つの方法
　　　　　根上生也氏(横浜国立大
　分科会Ⅰ、　大交流会（夜）
29日(金)
　分科会Ⅱ、手作り教室
　　　　　　(大会参加費　4,000円

2005年6月例会の報告

オホーツクの青空のもと６月18日、19日の２日間、紋別北高校を会場に６月例会が開催されました。今回お世話していただいた上西先生を初め紋別北校から３名の先生が参加されました。参加者は全部で11名、レポートは７本でした。.以下レポートの内容を簡単に紹介します。

(1)フィボナッチ数と黄金比

小林隆(清水高校)

フィボナッチ数とは,
1，1，2，3，5，8，i3，21，34，55，89,…
と漸化式が、$a_{n+2}=a_{n+1}+a$。
と表される数です。３年生の数学基礎のなかで、教科書の記述に不満を感じた小林さんが、webサイトで調べた興味ある内容が紹介されました。とくに面白いと感じたのは、以下の公式群です。

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_{n+2}-1$$
$$a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}$$
$$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=a_{2n+1}-1$$

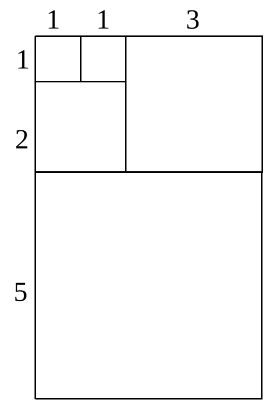
とくに次の公式

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=a_n\cdot a_{n+1}$$

$n=5$の場合

$$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2=5\cdot 8$$

は下のような図形的な意味をもっています。



これちの公式の証明を考えることでフィボナッチ数の秘密が見えてくるようです。
フィボナッチ数の隣接２項の比

$$a_{n+1}／a_n$$

の極限として黄金比

$$(1+\sqrt{5})／2=1.618\cdots$$

が現れることはよく知られた事実ですが,なぜ$\sqrt{5}$が現れるのか不思議です.
引き続き、美術を専攻された小林さんの奥さんから、美術と数学の関係について報

告がありました.

(2)「美術」と「数学」についてのメモ

小林夫人

数学では劣等生でしたとおっしゃる小林さんの奥さんですが,「数学」と「美」について、美術史に関する深い知識を織り交ぜながら素人のわれわれにも分りやすくお話していただきました。
産業革命によって、誰もが質の良いデザインや造形芸術に触れる機会が増え,美術のなかに「構成学」と呼ばれる分野が誕生しました。この領域ではプロポーション(比率)やグラデーション(漸変)などの概念が基本的役割りを果たします。これらを表現する手段として数学や数理科学が積極的に用いられるようになったということです。黄金分割は古代「神授比例法」とも呼ばれ、89 ／ 55 という値が使用されましたが、これはまさにフィボナッチ数の隣り合う 2 項です。

1919 年ドイツのワイマールに建築家グロピウスによってバウハウスという造形学校が設立されます。ここでは、誰もが美術や工芸を学ぶことができました。残念ながらナチスの手によってこの学校は閉鎖されますが、現在でもドイツではほとんどの美術大学でグロピウスの精神が引き継がれているということです。

(3)数列の和の公式

清水貞人(札幌新川高校)

自然数の和,平方数の和,立方数の和などの公式は誰もが面白いと感じる不思議な性質をもっています。少年ガウスがこれらの公式を自ら発見したという逸話がのこっています。清水さんは見ただけでわかる平面階段や立体階段の模型をしめすことで、この公式の意味を生徒に伝えています.

$$1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(n(n+1)/2)^2$$

一般に,$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$の和の公式は、k が奇数と偶数の場合で共通の特徴をもっています。上の和を n の多項式で表したときに、n の 1 次の係数をベルヌーイ数 B_nと呼んでいます。

$B_1=1/2$, $B_2=1/6$, $B_4=-1/30$, $B_6=1/42$, $B_8=-1/30$, $B_{10}=5/66$, …, $B_{2n+1}=0(n\geqq 1)$

です.
ベルヌーイ数は数論とも深い関係があり、興味ある題材です。

等比数列の和の公式については,

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=a(r^n-1)/(r-1)$$

のように,あくまで等比数列にこだわるのか、あるいはΣ記号の公式,

$$\sum_{k=}^{n} r^k=\frac{r(r^n-1)}{r-1}$$

として扱ったほうがよいのか、議論が分かれました。

(4)これでいいのか確率計算

渡邊勝(立命館慶祥高校)

教科書の記述、とくに確率の基礎概念と記法について、集合の記号をきちんと使用すべきであるという指摘がありました。渡邊さんは確率計算は単なる分数計算ではないという考えから、問題の解答では必ず集合

の記号

$$P(A) = n(A)/n(U)$$

を書くように指導しています。レポートでは次のように述べられています。

「親しみやすい」と「わかりやすい」を混同している。一見、,数式や記号を避けて見かけは易しく見えても、却って理解を妨げることがある。(中略)必要な言葉はしっかり教えなければならない。必要な記号も使いこなせるようにしなければならない。概念を記号化して操作することが可能なのが数学であり、これによって数学が発展できた。

確率論が集合論や測度論と密接な関係にあることは、1933 年に'コルモゴロフによって著された『確率論の基礎概念』によって公にされました。これを 1975 年に邦訳した根本伸司氏が高校教師であったことを、今回、渡邊さんから教えていただきました。

(5)三角関数・パラパラの作製

清水貞人(札幌新川高校)

清水さんが準備してくれたパラパラの型紙を使って、三角関数の教具であるパラパラを全員で作りました。これをつくることで三角関数の仕組みがよく理解できることがわかりました。サインウェイブは円筒に紙を巻きっけて斜めに切った断面や,シャツの袖の型紙の部分など、結構われわれの身近なところにも現れることが納得できました。

(6)数論的ピタゴラスの定理

眞鍋和弘(札幌篠路高校)

フランスの数学者 A.ヴェイユは『数論』のなかで,「数論の第 1 の誕生はフェルマーがディオファントスの著作を読ん日に始まり、第 2 の誕生はオイラーがフェルマーの研究を知った日に始まる」と述べています。数論的ピタゴラスの定理とは、ディオファントスがピタゴラスの定理の整数解を研究するなかで,

$5^2 = 3^2 + 4^2$

$13^2 = 5^2 + 12^2$

$17^2 = 8^2 + 15^2$

のように、2 つの平方数の和で表される数は「4m＋1 型の素数の平方になることが多い」ことに気がっいたことに始まります。フェルマーはさらに,「4m＋1 型の素数自身が必ず 2 っの平方数の和で表されることを証明した」と述べていますが,証明は残っていません。現存する証明としてはオイラーのものが最初です。この定理が契機となって、フェルマーは「フェルマーの大定理」を発見したと言われています。今回の報告は,

【定理】p が 4m＋1 型の素数なら、整数 x, y によつて　$P = x^2 + y^2$

と一意的に表される。

という定理は,複素数を用いると見通しよく証明できることを中心に行いました。これは最初にガウスによって発見されました。例えば 2 は素数ですが、実部、虚部がともに整数の複素数(ガウス整数)の範囲では因数分解されて

$2 = 1^2 + 1^2 = (1 + i)(1 - i)$

となります.同様に p が 4m ＋ 1 型の素数なら、x, y を整数として

$P = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi)$

と分解されることにガウスは気づきました。ある数 n が 2 つの平方数の和であらわされることと、n が互いに共役なガウス整数の積であることは同値です。

今回の報告をまとめるなかで、この思想が数論に大革命をもたらし「代数的整数論」という新分野が誕生したこと、さらに高木貞治によって「類体論」へと開花したとい

うことを知りました。いつの日か,高校生や市民とともにこれらの美しい数学を学びたいと考えています。

(7)市民の数学・対数発展編へのスケッチ3

成田牧(静内高校)

中世から近代へかけて,対数の誕生から発展までの物語を市民に伝えたいという情熱が伝わってくる報告です。1647 年にニュートンは一般二項展開を使って,底を e とする自然対数の級数展開

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

を見つけます。実は指数関数が数学史の中に登場するのは、,対数の発見からかなり後のことです。対数関数が指数関数の逆関数であることを初めて見抜いたのはかのオイラーでした。オイラーも『無限解析入門 』の中で一般二項展開を証明なしで用いています。今回の報告では一般二項展開についての詳しい説明がありました。

高校の教科書にも登場する二項定理は,

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_mb^n$$

となりますが,これを無限級数風に書き直すと次のようになります。

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2\cdot1}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}a^{n-3}b^3+\cdots$$

上の和は n + 1 項より上は O となる因数があるため、実際は有限和になっています。ニュートンやオイラーの時代は、厳密な微積分の理論がまだ完成しておらず、無限級数に関してもかなりおおらかに扱っていたようです。ニュートンたちは n が負の場合や、有理数の場合にも二項定理がなりたつと考えていました。

例えば上の式で a = 1, b = x, n = 1/2 としてみると,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdots$$

となります。この級数展開が正しいことは次のようにして確かめることができます。

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+\cdots$$

と整級数に展開されたと仮定し、両辺を 2 乗してみると,

$$1+x=1+2ax+(a^2+2b)x^2+(2ab+2c)x^3+(2ac+b^2+2d)x^4+\cdots$$

がえられます.両辺の係数を比較すると,

a = 1/2, b = − 1/8,
c = 1/16、d = − 5/128

となることがわかります.

成田さんの構想では,このあと複素関数としての対数までを扱う予定で、コーシーやリーマンの世界が展開されます。早い完成が待ち遠しく思われます.

(文責眞鍋)