第３章

第３節(案)

「階差０項数列」を使って,M乗数の数列の和を求める。

(*1*)　階差とは

M＝１　の場合　　　　　＜一行目の数列は、$\{\Sigma k\} = \{S_n\}$ ＞

0　*1*　*3*　*6*　*10*　*15*　*21*　・・・　＜$\{S_n\}$＞

(*0*)　*1*　*2*　*3*　*4*　*5*　*6*　・・・　＜$\{\Delta S_n\}$第一階差＞

(*1*)　1　1　1　1　1　・・・　＜$\{\Delta^2 S_n\}$第二階差＞

(*0*)　*0*　*0*　*0*　*0*　・・・　＜$\{\Delta^3 S_n\}$第三階差＞

M＝*2*　の場合　　　＜一行目の数列は、$\{\Sigma k^2\} = \{S_n\}$ ＞

0　1　*5*　*14*　*30*　*55*　*91*　・・・

(*0*)　*1*　*4*　*9*　*16*　*25*　*36*　・・・

(*1*)　*3*　*5*　*7*　*9*　*11*　・・・

(*2*)　*2*　*2*　*2*　*2*　・・・

(*0*)　*0*　*0*　*0*　・・・

M＝*3*　の場合　　＜一行目の数列は、$\{\Sigma k^3\} = \{S_n\}$ ＞

0　*1*　*9*　*36*　*100*　*225*　*441*　・・・

(*0*)　*1*　*8*　*27*　*64*　*125*　*216*　・・・

(*1*)　*7*　*19*　*37*　*61*　*91*　・・・

(*6*)　*12*　*18*　*24*　*30*　・・・

(*6*)　*6*　*6*　*6*　・・・

(*0*)　*0*　*0*　・・・

各行で一番左の数字の列を「階差０項数列」とよぶ。　〈次のように表す＞

＜ *M* ＝ *1* の場合、$\{N^1\}$、M＝ *2* の場合、$\{N^2\}$、M＝ *3* の場合、$\{N^3\}$、・・・＞

（２）階差０項数列の規則性

(*0*)　(*1*)　(*0*)　　　　$\{N^1\}$

1　1　　　　隣接二項間和

×１　× *2*

(*0*)　(*1*)　(*2*)　(*0*)　　　　$\{N^2\}$

1　*3*　*2*　　　　隣接二項間和

×１　× *2*　× *3*

(*0*)　(*1*)　(*6*)　(*6*)　(*0*)　　　　$\{N^3\}$

1　*7*　*12*　*6*　　　　隣接二項間和

×１　× *2*　× *3*　× *4*

(*0*)　(*1*)　(*14*)　(*36*)　(*24*)　(*0*)　　　　$\{N^4\}$

1　*15*　*50*　*60*　*24*　　　　隣接二項間和

×１　× *2*　× *3*　× *4*　× *5*

(*0*)　(*1*)　(*30*)　(*150*)　(*240*)　(*120*)　(*0*)　　　　$\{N^5\}$

1　*31*　*180*　*390*　*360*　*120*　　　　隣接二項間和

×１　× *2*　× *3*　× *4*　× *5*　× *6*

(*0*)　(*1*)　(*62*)　(*540*)　(*1560*)　(*1800*)　(*720*)　(*0*)　　　　$\{N^6\}$

（３）　階差０項数列の変化の規則性

$\{N^1\}$	(0)	(1)	(0)		
$2\{N^1\}$	0	2	0		
$3\{N^1\}$	0	3	0		
$\{N^2\}$	(0)	(1)	(2)	(0)	
$\{N^2\}+\{N^1\}$	0	2	2	0	
$\{N^2\}+2\{N^1\}$	0	3	2	0	
$\{N^2\}+3\{N^1\}$	0	4	2	0	
$2\{N^2\}$	0	2	4	0	
$2\{N^2\}+\{N^1\}$	0	3	4	0	
$2\{N^2\}+2\{N^1\}$	0	4	4	0	
$\{N^3\}$	(0)	(1)	(6)	(6)	(0)

＜それぞれの数列の第０項を１にした数列を、$\{N^1(+1)\}$ 、$\{N^2(+1)\}$ 、$\{N^3(+1)\}$ のように表すと＞

$\{N^1(+1)\}$	1	1	0		
$\{N^2(+1)\}$	1	1	2	0	
$\{N^3(+1)\}$	1	1	6	6	0

（４）階差０項数列の使い方

M＝*2*　の場合

$S(2)_N=0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+N^2=\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)=\frac{1}{3}N^3+\frac{1}{2}N^2+\frac{1}{6}N$　を求める。

＜第一行は、第一階差、第二階差、第三階差、第四階差の第一項を並べる。＞

	0	1	3	2	0
$-\{N^3\}\times\frac{1}{3}$	−0	$-\frac{1}{3}$	−2	−2	−0
	0	$\frac{2}{3}$	1	0	0
$-\{N^2\}\times\frac{1}{2}$	−0	$-\frac{2}{3}$	1	−0	
	0	1/6	0	0	
$-\{N^1\}\times 1/6$	−0	− 1/6	−0		
	0	0	0		

上の計算表から　$S(2)_N=\frac{1}{3}N^3+\frac{1}{2}N^2+\frac{1}{6}N$

第４章

階差数列について

多項式の和の形による数列の分析の例
階差数列の一般式について

＜　$\{n^{M}\}$　の階差数列　　n；*0* 以上の整数、Ｍ；*1* 以上の整数　＞
＜林流記法、例　$\mathcal{M}(2-3)$　は、数列$\{n^{2}\}$の第 *3* 階階差数列を表す＞

Ｍ＝１の場合

0、*1*、*2*、*3*、*4*、*5*、・・・　$\mathcal{M}(1-0)$；$\{n\}$　　＜数列$\{n\}$＞
1、１，*1*、*1*、*1*、・・・　$\mathcal{M}(1-1)$；$\{1\}$　　＜上の数列の第１階階差数列＞
0、*0*、*0*、*0*、・・・

Ｍ＝２の場合

0、*1*、*4*、*9*、*16*、*25*、・・・$\mathcal{M}(2-0)$；$\{n^{2}\}$　　＜数列$\{n^{2}\}$＞
1、*3*，*5*、*7*、*9*、・・・　$\mathcal{M}(2-1)$；$\{2n+1\}$　　＜第１階階差数列＞
2、*2*、*2*、*2*、・・・　$\mathcal{M}(2-2)$；$\{2\}$　　＜第２階階差数列＞
0、*0*、*0*、・・・

Ｍ＝３の場合

0、*1*、*8*、*27*、*64*、*125*、・・・　$\mathcal{M}(3-0)$；$\{n^{3}\}$　　＜数列$\{n^{3}\}$＞
1、*7*，*19*、*37*、*61*、・・・　$\mathcal{M}(3-1)$；$\{3n^{2}+3n+1\}$　＜第１階階差数列＞
6、*12*、*18*、*24*、・・・　$\mathcal{M}(3-2)$；$\{6n+6\}$　　＜第２階階差数列＞
6、*6*、*6*、・・・　$\mathcal{M}(3-3)$；$\{6\}$　　＜第 *3* 階階差数列＞

Ｍ＝４の場合

0、*1*、*16*、*81*、*256*、*625*、*1296*、・・・$\mathcal{M}(4-0)$；$\{n^{4}\}$
1、*15*，*65*、*175*、*369*、*691*、・・・　$\mathcal{M}(4-1)$；$\{4n^{3}+6n^{2}+4n+1\}$
14、*50*、*110*、*194*、*302*、・・・　$\mathcal{M}(4-2)$；$\{12n^{2}+24n+14\}$
36、*60*、*84*、*108*、・・・　$\mathcal{M}(4-3)$；$\{24n+36\}$
24、*24*、*24*、・・・　$\mathcal{M}(4-4)$；$\{24\}$
0、*0*、・・・

以上をまとめて

$\mathcal{M}(1-0)$；$\{n\}$
$\mathcal{M}(1-1)$；$\{1\}$

$\mathcal{M}(2-0)$；$\{n^{2}\}$
$\mathcal{M}(2-1)$；$\{2n+1\}$
$\mathcal{M}(2-2)$；$\{2\}$

$\mathcal{M}(3-0)$；$\{n^{3}\}$
$\mathcal{M}(3-1)$；$\{3n^{2}+3n+1\}$
$\mathcal{M}(3-2)$；$\{6n+6\}$
$\mathcal{M}(3-3)$；$\{6\}$

$\mathcal{M}(4-0)$；$\{n^{4}\}$
$\mathcal{M}(4-1)$；$\{4n^{3}+6n^{2}+4n+1\}$
$\mathcal{M}(4-2)$；$\{12n^{2}+24n+14\}$
$\mathcal{M}(4-3)$；$\{24n+36\}$
$\mathcal{M}(4-4)$；$\{24\}$

階差数列の一般式の規則性

M＝４　の場合

$\mathcal{M}(4-0)$; $\{n^4\}$

$\mathcal{M}(4-1)$; $\{4n^3+6n^2+4n+1\}$

$\mathcal{M}(4-2)$; $\{12n^2+24n+14\}$

$\mathcal{M}(4-3)$; $\{24n+36\}$

$\mathcal{M}(4-4)$; $\{24\}$

一般項の第一項；n^4→微分→ $4n^3$→微分→ $12n^2$ →微分→ $24n$ →微分→ 24

$\mathcal{M}(4-1)$; $\{4n^3+6n^2+4n+1\}$ の係数を使って、以下、一般式を求める手掛かり。

4	6	4	1	$\mathcal{M}(4-1)$
4 × 1	6 × 1	4 × 1	1 × 1	
12	24	14		$\mathcal{M}(4-2)$
6 × 2	4 × 6	1 × 14		
24	36			$\mathcal{M}(4-3)$
4 × 6	1 × 36			
24				$\mathcal{M}(4-4)$
1 × 24				

〈乗数の表〉

× 1	× 1	× 1	× 1
× 2	× 6	× 14	
× 6	× 36		
× 24			

＜乗数の作り方＞

× 1				上表 1 行目 1 列
1	1			左 1 上段そのまま、右 1 は付加
× 2	× 1			右から 1, 2
× 2	× 1			2 行と 3 行の各数掛け算
2	3	1		左上段左端、中は上段隣接２項間の和
× 3	× 2	× 1		右から 1, 2、3
× 6	× 6	× 1		5 行と 6 行の各数の掛け算
× 6	12	7	1	左上段左端、中は上段隣接２項間の和
× 4	× 3	× 2	× 1	右から 1, 2、3、4
24	× 36	× 14	× 1	8 行と 9 行の各数の掛け算

M＝５　の場合　＜で検証する＞　＜①乗数を作ってみる＞

× 1				
1	1			
× 2	× 1			
× 2	× 1			
2	3	1		
× 3	× 2	× 1		
× 6	× 6	× 1		
× 6	12	7	1	
× 4	× 3	× 2	× 1	
× 24	× 36	× 14	× 1	
× 24	60	50	15	1
× 5	× 4	× 3	× 2	× 1
× 120	× 240	× 150	× 30	× 1

＜②乗数を配置する＞

×1　×1　×1　×1　×1

×2　×6　×14　×30

6　×36　×150

24　×240

120

＜③　一階差分数列一般項を求める＞

$M(5-1) = (n+1)^5 - n^5$

$= 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$

＜④　③の係数から5階までの差分数列一般項の係数を作る。＞

5　10　10　5　1

5×1　10×1　10×1　5×1　1×1

10×2　10×6　5×14　1×30

10×6　5×36　1×150：M(5−4)係数

5×24　1×240　：M(5−4)　係数

1×120　：M(5−5)

＜⑤　結果は次のようになる＞

$M(5-2)$；$\{20n^3 + 60n^2 + 70n + 30\}$

$M(5-3)$；$\{60n^2 + 180n + 150\}$

$M(5-4)$；$\{120n + 240\}$

$M(5-5)$；$\{120\}$　　×

Ｍ＝６　の場合＜で検証する＞　＜①乗数を作ってみる＞

×1

1　1

×2　×1

×2　×1

2　3　1

×3　×2　×1

×6　×6　×1

×6　12　7　1

×4　×3　×2　×1

×24　×36　×14　×1

×24　60　50　15　1

×5　×4　×3　×2　×1

×120　×240　×150　×30　×1

×120　360　390　180　31　1

×6　×5　×4　×3　×2　×1

×720　×1800　×1560　×540　×62　1

＜②乗数を配置する＞

× 1	× 1	× 1	× 1	× 1	× 1
× 2	× 6	× 14	× 30	× 62	
× 6	× 36	× 150	× 540		
× 24	× 240	× 1560			
× 120	× 1800				
× 720					

＜③一階差分数列一般項を求める＞

$$M(6\text{–}1) = (n+1)^6 - n^6$$
$$= 6n^5 + 15n^4 + 20n^3 + 15n^2 + 6n + 1$$

＜④　③の係数から *5* 階までの差分数列一般項の係数を作る。＞

6	15	20	15	6	1	$M(6\text{–}1)$ の係数
6 × 1	15 × 1	20 × 1	15 × 1	6 × 1	1 × 1	$M(6\text{–}1)$ の係数
15 × 2	20 × 6	15 × 14	6 × 30	1 × 62		$M(6\text{–}2)$ の係数
20 × 6	15 × 36	6 × 150	1 × 540			$M(6\text{–}3)$ の係数
15 × 24	6 × 240	1 × 1560				$M(6\text{–}4)$ の係数
6 × 120	1 × 1800					$M(6\text{–}5)$ の係数
1 × 720						$M(6\text{–}6)$

＜⑤　結果は次のようになる＞

$M(6\text{–}2)$; $\{30n^4 + 120n^3 + 210n^2 + 180n + 1\}$
$M(6\text{–}3)$; $\{120n^3 + 540n^2 + 900n + 540\}$
$M(6\text{–}4)$; $\{360n^2 + 1440n + 1560\}$
$M(6\text{–}5)$; $\{720n + 1800\}$
$M(6\text{–}6)$; $\{720\}$

M＝７　の場合＜検証は上の例の通りやってみる＞

＜①＞

× 2　× 1

2　3　1

× 3　× 2　× 1

× 6　× 6 × 1

6　12　7　1

× 4　× 3　× 2　× 1

× 24 × 36 × 14　× 1

24　60　50　15　1

× 5　× 4　× 3　× 2　× 1

× 120 × 240 × 150　× 30　× 1

120　360　390　180　31　1

× 6　× 5　× 4　× 3　× 2　× 1

× 720 × 1800 × 1560 × 540　× 62　× 1

720　2520　33660　2100　602　63　1

× 7　× 6　× 5　× 4　× 3　× 2　× 1

× 5040 × 15120 × 16800 × 8400 × 1806 × 126 × 1

＜②＞＜③＞＜④＞

7 7 × 1	21 21 × 1	35 35 × 1	35 35 × 1	21 21 × 1	7 7 × 1	1 1 × 1
42 21 × 2	210 35 × 6	490 35 × 14	630 21 × 30	434 7 × 62	126 1 × 126	
210 35 × 6	1260 35 × 36	3150 21 × 150	3780 7 × 540	1806 1 × 1806		
840 35 × 24	5040 21 × 240	10920 7 × 1560	8400 1 × 8400			
2520 21 × 120	12600 7 × 1800	16800 1 × 16800				
5040 7 × 720	15120 1 × 15120					
5040 1 × 5040						

＜⑤＞

$M(7-2)$;　$42n^{5} + 210n^{4} + 490n^{3} + 630n^{2} + 434n + 126$

$M(7-3)$;　$210n^{4} + 1260n^{3} + 3150n^{2} + 3780n + 1806$

$M(7-4)$;　$840n^{3} + 5040n^{2} + 10920n + 8400$

$M(7-5)$;　$2520n^{2} + 12600n + 16800$

$M(7-6)$;　$5040n + 15120$

$M(7-7)$;　5040

階差数列一般式の使い方と規則性

＜　数列　$\{a_n\}$　$a_n = c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \cdots + c_0$　のとき、

第一階差数列　Δa_n　について、差分の線型性が成り立つので

$\Delta a_n = c_k \Delta n^k + c_{k-1} \Delta n^{k-1} + \cdots + c_1 \Delta n + c_0 \Delta 1$

$= c_k \mathcal{M}(k-1) + c_{k-1} \mathcal{M}(\langle k-1\rangle -1) + \cdots + c_1 \mathcal{M}(1-1) + c_0 \mathcal{M}(0-1)$　＞

＜具体例　i ＞

$a_n = 6n^4 + 5n^3 + 4n^2 + 3n + 2$　の場合

$\Delta a_n = 6 \times \mathcal{M}(4-1) + 5 \times \mathcal{M}(3-1) + 4 \times \mathcal{M}(2-1) + 3 \times \mathcal{M}(1-1)$

$6 \times \mathcal{M}(4-1) = 6(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) = 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6$

$5 \times \mathcal{M}(3-1) = 5(3n^2 + 3n + 1) = 15n^2 + 15n + 5$

$4 \times \mathcal{M}(2-1) = 4(2n + 1) = 8n + 4$

$3 \times \mathcal{M}(1-1) = 3(1) = 3$

+) $2 \times \mathcal{M}(0-1) = 2(0) = 0$

$\Delta a_n = 24^{3} + 51n^{2} + 47n + 18$

＜第２階階差数列　$\Delta^2 a_n$　について、差分の線型性が成り立つので

$\Delta^2 a_n = c_k \Delta^2 n^k + c_{k-1} \Delta^2 n^{k-1} + \cdots + c_1 \Delta^2 n$

$= c_k \mathcal{M}(k-2) + c_{k-1} \mathcal{M}(\langle k-1\rangle -2) + \cdots + c_1 \mathcal{M}(1-2)$　＞

＜具体例　ii ＞

$a_n = 6n^4 + 5n^3 + 4n^2 + 3n + 2$　の場合

$\Delta^2 a_n = 6 \times \mathcal{M}(4-2) + 5 \times \mathcal{M}(3-2) + 4 \times \mathcal{M}(2-2) + 3 \times \mathcal{M}(1-2)$

$6 \times \mathcal{M}(4-2) = 6(12n^2 + 24n + 14) = 72n^2 + 144n + 84$

$5 \times \mathcal{M}(3-2) = 5(6n + 6) = 30n + 30$

$4 \times \mathcal{M}(2-2) = 4(2) = 8$

+) $3 \times \mathcal{M}(1-2) = 3(0) = 0$

$\Delta^2 a_n = 72n^2 + 174n + 122$

＜具体例　iii ＞

$a_n = 6n^4 + 5n^3 + 4n^2 + 3n + 2$　の場合

$\Delta^3 a_n = 6 \times \mathcal{M}(4-3) + 5 \times \mathcal{M}(3-3)$

$6 \times \mathcal{M}(4-3) = 6(24n + 36) = 144n + 216$

$5 \times \mathcal{M}(3-3) = 5(6) = 30$

$\Delta^3 a_n = \quad = 144n + 246$

＜以上まとめると＞

$a_n = 6n^4 + 5n^3 + 4n^2 + 3n + 2$

$\Delta a_n = 24^{3} + 51n^{2} + 47n + 18$

$\Delta^2 a_n = 72n^2 + 174n + 122$

$\Delta^3 a_n = 144n + 246$

$\Delta^4 a_n = 144$

＜定数項以外の項の係数の和は次階の定数項＞

$6 + 5 + 4 + 3 = 18$

$24 + 51 + 47 = 122$

$72 + 174 = 246$

$144 = 144$

＜ 4 次の項の係数×４、3 次の項の係数＋ 3、　2 次の項の係数× 2

これらの和は次階の n の係数である＞

$6 \times 4 + 5 \times 3 + 4 \times 2 = 47$

$24 \times 3 + 51 \times 2 = 174$

$72 \times 2 = 144$