例（１）　一般項が自然数の 2 乗である数列の和の公式を求めます。

自然数の数列$\{a_k\}=\{k\}$：$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$　の第 0 項から第 k 項までの和を $S^1{}_k$ と表し、自然数の 2 乗の数列 $a_k\}=\{k^2\}$：$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$　の第 0 項から第 k 項までの和を $S^2{}_k$ と表します。

$\{S^1{}_k\}=\{0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \ 21,\ 28,\ 36,\ \cdots\}$

$\{S^2{}_k\}=\{0,\ 1,\ 5,\ 14,\ 30,\ 55,\ 91.\ 140,\ 204,\ \cdots\}$

ここで対応する項の比で作る新しい数列を考察します

$k\neq 0$　$\left\{\dfrac{S_k^2}{S_k^1}\right\}=\left\{\dfrac{1}{1},\dfrac{5}{3},\dfrac{14}{6},\dfrac{30}{10},\dfrac{55}{15},\dfrac{91}{21},\dfrac{140}{28},\dfrac{204}{36},\cdots\right\}$

$\left\{\dfrac{S_k^2}{S_k^1}\right\}=\left\{\dfrac{1}{1},\dfrac{5}{3},\dfrac{7}{3},\dfrac{3}{1},\dfrac{11}{3},\dfrac{13}{3},\dfrac{5}{1},\dfrac{17}{3},\cdots\right\}$

通分して $\left\{\dfrac{S_k^2}{S_k^1}\right\}=\left\{\dfrac{3}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{7}{3},\dfrac{9}{3},\dfrac{11}{3},\dfrac{13}{3},\dfrac{15}{3},\dfrac{17}{3},\cdots\right\}$ 分子が奇数列ゆえに

$\left\{\dfrac{S_k^2}{S_k^1}\right\}=\left\{\dfrac{2k+1}{3}\right\},(k=1,2,3,\ldots)$

上式より、$S_k^2=\dfrac{2k+1}{3}\times S_k^1=\dfrac{2k+1}{3}\times\dfrac{1}{2}k(k+1)=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

当然　　$S_n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　が予想されますが､数学的帰納法で証明します。

予想　$n\geqq 1$　の自然数のとき　$S_n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　・・・(A)

［証明］　ⅰ）　$n=1$　の時　左辺：$S^2{}_1=1$、右辺：$\dfrac{1}{6}\times 1\times(1+1)(2\times 1+1)=1$

故に、(A)は成立します。

ⅱ）　$n=k$ のとき(A)が成立すると仮定しますと、

$S_k^2=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

この両辺に$(k+1)^2$を加えますと

$S_k^2+(k+1)^2=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$

$S_{k+1}^2=\dfrac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}$

$S_{k+1}^2=\dfrac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$

$S_{k+1}^2=\dfrac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$S_{k+1}^2=\dfrac{1}{6}<k+1>(<k+1>+1)(2<k+1>+1)$

よって、$n=k+1$　の時にも(A)は成立します。

ⅲ）したがって、$n \geqq 1$　の全ての自然数について(*A*)は成立します。
よって、予想は定理になりました。

例（２）　一般項が自然数の *3* 乗である数列の和の公式を求めます。

自然数の *3* 乗の数列 $\{a^3{}_k\} = \{k^3\}$: $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$ の第 *0* 項から第 *k* 項までの和を $S^3{}_k$ と表します。前の例に出た $S^1{}_k$ と同時に書き並べなます。

$\{S^1{}_k\} = \{0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ \cdots\}$

$\{S^3{}_k\} = \{0,\ 1,\ 9,\ 36,\ 100,\ 225,\ 441,\ 784,\ 1296,\ \cdots\}$

ここで対応する項の比で作る新しい数列を考察します

$$k \neq 0 \qquad \left\{\frac{S_k^3}{S_k^1}\right\} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{9}{3}, \frac{36}{6}, \frac{100}{10}, \frac{225}{15}, \frac{441}{21}, \frac{784}{28}, \frac{1296}{36}, \ldots\right\}$$

$$\left\{\frac{S_k^3}{S_k^1}\right\} = \{\ 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \ldots\}$$

この数列の階差数列は $\Delta\left\{\frac{S_k^3}{S_k^1}\right\} = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8, \cdots\}$ なので、一般項は

$$\frac{S_k^3}{S_k^1} = 1 + \sum_{\ell=1}^{k-1}(\ell+1) = 1 + \frac{1}{2}(k-1)(k) + k - 1 = \frac{1}{2}k\{k+1\}$$

上式より、 $S_k^3 = \frac{1}{2}k(k+1) \times S_k^1 = \frac{1}{2}k(k+1) \times \frac{1}{2}k(k+1) = \left(\frac{1}{2}k(k+1)\right)^2 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2$

当然　$S_n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$　が予想されますが、数学的帰納法で証明します。

予想　$n \geqq 1$　の自然数のとき、 $S_n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$　・・・(*B*)

［証明］

ⅰ）　$n = 1$ のとき、左辺 : $S^3{}_1 = 1^3 = 1$、右辺 : $\frac{1}{4} \times 1^2(1+1)^2 = 1$　ゆえに(*B*)は成立。

ⅱ）　$n = k$ のとき(*B*)が成立すると仮定する。

$S_k^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2$ 。両辺に　$\langle k+1 \rangle^3$　を加える。

左辺 : $S^3{}_K + \langle k+1 \rangle^3 = S^3{}_{<k+1>}$

右辺 : $\frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + <k+1>^3 = \frac{1}{4}\ (k+1)^2(k^2 + 4<k+1>)$

$= \frac{1}{4}\ (k+1)^2(k^2 + 4k + 4) = \frac{1}{4}\ (k+1)^2(k+2)^2$

$= \frac{1}{4} <k+1>^2(<k+1>+1)^2$

ゆえに、$n = k + 1$　のときにも(*B*)が成り立っています。

ⅲ）　したがって、$n \geqq 1$　である自然数に対して、(*B*)が成立します。

よって、予想は定理になりました。

例（3） 一般項が自然数の 4 乗である数列の和の公式を求めます。

自然数の 4 乗の数列 $\{a^4{}_k\} = \{k^4\}$: $k = 0, 1, 2, 3,$ ・・・の第 0 項から第 k 項までの和を $S^4{}_k$ と表します。

$\{S^4{}_k\} = \{0, 1, 17, 98, 354, 979, 2275, 4676, 8772, 15333, 25333, \cdots\}$

$\{S^2{}_k\} = \{0, 1, 5, 14, 30, 55, 91. 140, 204, \cdots\}$

対応する各項の比によって新しい数列を作ります。ただし、$k \geqq 1$ とします。

$$\left\{\frac{S_k^4}{S_k^2}\right\} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{17}{5}, \frac{98}{14}, \frac{354}{30}, \frac{979}{55}, \frac{2275}{91}, \frac{4676}{140}, \frac{15333}{204}, \frac{25333}{285}, \ldots\right\}$$

$$= \left\{1, 3\frac{2}{5}, 7, 11\frac{4}{5}, 17\frac{4}{5}, 25, 33\frac{2}{5}, 43, 53\frac{4}{5}, \ldots\right\}$$

この数列の階差数列を作ると

$$\Delta\left\{\frac{S_k^4}{S_k^2}\right\} = \left\{2\frac{2}{5}, 3\frac{3}{5}, 4\frac{4}{5}, 6, 7\frac{1}{5}, 8\frac{2}{5}, 9\frac{3}{5}, 10\frac{4}{5}, \ldots\right\}$$

さらにこの階差数列の階差数列[2 階階差数列]を作ると

$$\Delta^2\left\{\frac{S_k^4}{S_k^2}\right\} = \left\{1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5}, , \ldots\right\}$$

したがって、一階階差数列の一般項は

$$\Delta\left\{\frac{S_k^4}{S_k^2}\right\} = \left\{2\frac{2}{5} + (k-1) \times 1\frac{1}{5}\right\} = \left\{\frac{6}{5}(k+1)\right\}$$

ゆえに、元の比による数列の一般項は

$$\left\{\frac{S_k^4}{S_k^2}\right\} = \left\{\frac{1}{1} + \sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{6}{5}(\ell+1)\right\} = \left\{1 + \frac{6}{5}\sum_{\ell=1}^{k-1}\ell + \frac{6}{5}\sum_{\ell=1}^{k-1}1\right\} = \left\{1 + \frac{6}{5} \times \frac{1}{2}(k-1)k + \frac{6}{5}(k-1)\right\}$$

$$= \left\{\frac{5}{5} + \frac{3}{5}(k-1)k + \frac{6}{5}(k-1)\right\} = \left\{\frac{1}{5}(5 + 3k^2 - 3k + 6k - 6)\right\} = \left\{\frac{1}{5}(3k^2 + 3k - 1)\right\}$$

よって、

$$S_k^4 = \frac{1}{5}(3k^2 + 3k - 1) \times S_k^2 = \frac{1}{5}(3k^2 + 3k - 1) \times \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

当然 $S_n^4 = \dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$ が予想されますが、数学的帰納法で証明します。

予想 $n \geqq 1$ の自然数のとき、$S_n^4 = \dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$ ・・・(C)

[証明]

ⅰ） $n = 1$ のとき、左辺：$S^4{}_1 = 1^4 = 1$、

右辺：$\dfrac{1}{30} \times 1(1+1)\{2 \times 1 + 1\}(3 \times 1^2 + 3 \times 1 - 1) = 1$ ゆえに(C)は成立。

ⅱ）　$n = k$ のとき (C) が成立すると仮定する。

$$S_k^4 = \frac{1}{30}k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)$$

両辺に $(k+1)^4$ を加えます。

左辺：$S^4{}_k + (k+1)^4 = S^4{}_{k+1}$

右辺：$\frac{1}{30}k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)+(k+1)^4$

$$=\frac{1}{30}(k+1)\{\ k(2k+1)(3k^2+3k-1)+30(k+1)^3\}$$

$$=\frac{1}{30}(k+1)\{\ 6k^4+39k^3+91k^2+89k+30\ \}$$ 以下因数定理を用いて

$$=\frac{1}{30}(k+1)(k+2)\{\ 6k^3+27k^2+37k+15\ \}$$

$$=\frac{1}{30}(k+1)(k+2)(2k+3)\{\ 3k^2+9k+5\ \}$$

$$=\frac{1}{30}<k+1>(<k+1>+1)(2<k+1>+1)\{\ 3<k+1>^2+3<k+1>-1\ \}$$

よって、$n = k + 1$　において (C) は成立しています。

ⅲ）　したがって、$n \geqq 1$　である自然数に対して、(C) が成立します。

よって、予想は定理になりました。

例（4）　一般項が自然数の 5 乗である数列の和の公式を求めます。

自然数の 5 乗の数列 $\{a^5{}_k\} = \{k^5\}$: $k = 0, 1, 2, 3,$ ・・・の第 0 項から第 k 項までの和を $S^5{}_k$ と表します。3 乗数列の和 $S^3{}_k$ を下に書き並べます。

$\{S^5{}_k\} = \{0,\ 1,\ 33,\ 276,\ 1300,\ 4425,\ 12201,\ 29008,\ 61776,\ 120825,\ 220825, \cdots\}$

$\{S^3{}_k\} = \{0,\ 1,\ 9,\ 36,\ 100,\ 225,\ 441.\ 784,\ 1296,\ 2025,\ 3025, \cdots\}$

対応する各項の比によって新しい数列を作ります。ただし、$k \geqq 1$ とします。

$$\left\{\frac{S_k^5}{S_k^3}\right\} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{33}{9}, \frac{276}{36}, \frac{1300}{100}, \frac{4425}{225}, \frac{12201}{441}, \frac{29008}{784}, \frac{61776}{1296}, \frac{120825}{2025}, \frac{220825}{3025}, \ \cdots\right\}$$

$$= \left\{1, 3\frac{2}{3}, 7\frac{2}{3}, 13, 19\frac{2}{3}, 27\frac{2}{3}, 37, 47\frac{2}{3}, 59\frac{2}{3}, 73, \ldots\right\}$$

この数列の階差数列を作ると

$$\Delta\left\{\frac{S_k^5}{S_k^3}\right\} = \left\{2\frac{2}{3}, 4, 5\frac{1}{3}, 6\frac{2}{3}, 8, 9\frac{1}{3}, 10\frac{2}{3}, 12, 13\frac{1}{3}, \ \ldots\right\}$$

さらにこの階差数列の階差数列[2 階階差数列]を作ると

$$\Delta^2\left\{\frac{S_k^5}{S_k^3}\right\} = \left\{1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, \ , \ldots\right\}$$

したがって、一階階差数列の一般項は

$$\Delta\left\{\frac{S_k^5}{S_k^3}\right\}=\left\{2\frac{2}{3}+(k-1)\times 1\frac{1}{3}\right\}=\left\{\frac{4}{3}(k+1)\right\}$$

ゆえに、元の比による数列の一般項は

$$\left\{\frac{S_k^5}{S_k^3}\right\}=\left\{\frac{1}{1}+\sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{4}{3}(\ell+1)\right\}=\left\{1+\frac{4}{3}\sum_{\ell=1}^{k-1}\ell+\frac{4}{3}\sum_{\ell=1}^{k-1}1\right\}=\left\{1+\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}(k-1)k+\frac{4}{3}(k-1)\right\}$$

$$=\left\{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}(k-1)k+\frac{4}{3}(k-1)\right\}=\left\{\frac{1}{3}(3+2k^2-2k+4k-4)\right\}=\left\{\frac{1}{3}(2k^2+2k-1)\right\}$$

よって、

$$S_k^5=\frac{1}{3}(2k^2+2k-1)\times S_k^3=\frac{1}{3}(2k^2+2k-1)\times\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

当然　$S_n^5=\dfrac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$　が予想されますが、数学的帰納法で証明します。

予想　$n \geqq 1$　の自然数のとき、$S_n^5=\dfrac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$　・・・(D)

[証明]

ｉ）　$n=1$ のとき、左辺：$S^5{}_1=1^5=1$、

右辺：$\dfrac{1}{12}\times 1^2(1+1)^2(2\times 1^2+2\times 1-1)=1$　ゆえに(D)は成立。

ⅱ）　$n=k$ のとき(D)が成立すると仮定する。

$$S_k^5=\frac{1}{12}k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)$$

両辺に$(k+1)^5$を加えます。

左辺：$S^5{}_k+(k+1)^5=S^5{}_{k+1}$

右辺：$\dfrac{1}{12}k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)+(k+1)^5$

$$=\frac{1}{12}(k+1)^2\{k^2(2k^2+2k-1)+12(k+1)^3\}$$

$$=\frac{1}{12}(k+1)^2\{2k^4+14k^3+35k^2+36k+12\}$$　以下因数定理を用いて

$$=\frac{1}{12}(k+1)^2(k+2)\{2k^3+10k^2+15k+6\}$$

$$=\frac{1}{12}(k+1)^2(k+2)^2\{2k^2+6k+3\}$$

$$=\frac{1}{12}\langle k+1\rangle^2(\langle k+1\rangle+1)^2\{2\langle k+1\rangle^2+2\langle k+1\rangle-1\}$$

よって、$n=k+1$　において(D)は成立しています。

ⅲ）　したがって、$n \geqq 1$　である自然数に対して、(D)が成立します。

予想は定理になりました。